

BERICHT
aus dem
PSYCHOLOGISCHEN INSTITUT
DER UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Diskussionspapier Nr. 24 / II

April 1981

DIE ENTWICKLUNG DES ZAHLBEGRIFFS +

Teil II. ENTWICKLUNGSLINIEN DES ZAHLBEGRIFFS
IM VORSCHULALTER:
DESKRIPTIVE UNTERSUCHUNG DES
KINDLICHEN ZAHLVERSTÄNDNISSES
UND VERWANDTER KONZEPTE

Friedrich Voigt

Vorbemerkung :

Die Untersuchung wurde durch die freundliche Unterstützung der folgenden Kindergärten ermöglicht :

Evangelischer Kindergarten (Baden-Badenerstraße),

Evangelischer Kindergarten (Mühlthalstraße),

Evangelischer Kindergarten (Am Heiligen Haus),

Katholischer Kindergarten St. Benedikt,

Evangelischer Kindergarten (Vangerowstraße),

Evangelischer Kindergarten (Schröderstraße),

Evangelischer Kindergarten (Tischbeinstraße),

Evangelischer Kindergarten (Viermheimerweg).

Die Untersuchungen in den Kindergärten wurden durchgeführt von Daniela Weiler, Hannelore Hill, Helga Rittenauer-Schatka, Susanne Bally, Wolfgang Eberl.

Die mühsame Arbeit des Tippens wurde von Ursula Müller mit großer Sorgfalt durchgeführt.

Ermöglicht wurde die vorliegende Untersuchung in erster Linie durch die kontinuierliche persönliche Unterstützung von Professor F.E. Weinert.

F. Voigt

ENTWICKLUNGSLINIEN DES ZAHLBEGRIFFS IM VORSCHULALTER : DESKRIPTIVE UNTERSUCHUNG DES KINDLICHEN ZAHLVERSTÄNDNISSES UND VERWANDTER KONZEPTE

Gliederung:

I.	<u>Zielsetzung der Untersuchung</u>	S. 1
II.	<u>Aufbau und Durchführung der Untersuchung</u>	S. 5
1.	Stichprobe	S. 5
2.	Versuchsleitertraining	S. 5
3.	Beschreibung der verwendeten Aufgaben	S. 7
4.	Durchführung der Untersuchung	S. 22
5.	Auswertung der Reliabilität	S. 22
6.	Vorhersageanalyse - eine Methode zur Untersuchung von Entwicklungsmodellen	S. 23
III.	<u>Darstellung der Ergebnisse</u>	S. 28
1.	Mengenvergleiche - Zählen und Korrespondenz als Lösungsstrategie	S. 28
1.1.	Ergebnisse für einzelne Aufgaben	S. 28
1.2.	Entwicklungsbeziehungen zwischen Zähl- und Korrespondenzaufgaben	S. 45
2.	Zahlinvarianz und Beziehung dieser Aufgabe zu Zähl- und Korrespondenzaufgaben	S. 52
2.1.	Zahlinvarianzaufgabe	S. 52
2.2.	Zahlinvarianzaufgaben in Beziehung zu Zähl- und Korrespondenzaufgaben - Mengenvergleiche als Vorbedingung der Invarianz	S. 57
2.3.	Guttman-Skalierung der Kardinationsaufgaben	S. 66
3.	Einzelergebnisse der Ordinationsaufgaben und Wechselbeziehung zwischen den Aufgaben	S. 73
3.1.	Ordination - Seriation - Stabaufgabe	S. 73
3.2.	Entwicklungsbeziehungen zwischen den Ordinationsaufgaben	S. 79
3.3.	Guttman-Skalierung der Ordinationsaufgaben	S. 84

4. Entwicklungsbeziehungen zwischen Zahlinvarianzaufgabe und Ordinations/Seriationsaufgaben	S. 87
5. Einige Detailergebnisse zu Zählaufgaben	S.102
6. Klassifikationsaufgaben	S.106
6.1.Detailergebnisse einzelner Aufgaben	S.106
6.2.Zahlinvarianz und Klassifikation	S.111
7. Entwicklungsbeziehungen zwischen Kordinations- und Ordinationsaufgaben nach Brainerd	S.115
8. Zusammenfassung und kritische Bewertung der Theorien der Zahlentwicklung	S.120

+++++

I. Zielsetzung der Untersuchung

Ausgangspunkt der deskriptiven Untersuchung sind drei Theorien der Zahlbegriffsentwicklung. Die bekannteste, die Theorie Jean Piagets, deutet die Entstehung des Zahlbegriffs aus der Synthese zweier logischer Strukturen in der Entwicklung, nämlich der Seriation (Asymmetrische-transitive Beziehungen) und der Klassifikation. Die ordinale Theorie der Zahlentwicklung versteht dagegen die Bildung des Zahlbegriffs als eine Abstraktion des Kindes aus grundlegenden Ordnungsbeziehungen zwischen Gegenständen (Ordination bzw. Seriation). Schließlich leitet die kardinale Theorie den Zahlbegriff aus der Abstraktion der Eigenschaften logisch ähnlicher Klassen ab (Kardination).

Die empirische Untersuchung der relativen Gültigkeit dieser Theorien hat sich bislang auf die Prüfung der Entwicklungsbeziehungen zwischen wenigen Aufgaben beschränkt (Brainerd, 1979). Es wurde nicht versucht, die verschiedenen Konzepte in einen größeren Zusammenhang der Zahlentwicklung bei Vorschulkindern zu stellen (1). Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es, die verschiedenen Teilprozesse und Fertigkeiten des Kindes im Vorschulalter im Umgang mit Zahlen in Beziehung zu setzen zu den nach Ansicht der jeweiligen Theorien der Zahlentwicklung einander verwandten Konzeptbereichen der Ordination, der Kardination und der Klassifikation. In drei Altersgruppen werden daher verschiedene Aufgaben zur Kardination und zu kardinalen Vergleichen (Mengenvergleichen), zur Ordination, zur Klassifikation und zur Zahlinvarianz untersucht. Bei der Untersuchung wird besonderes Gewicht darauf gelegt, qualitative Eigenheiten des kindlichen Lösungsprozesses bei verschiedenen Aufgaben herauszuarbeiten. Daneben haben intraindividuelle Vergleiche der Leistung des Kindes bei unterschiedlichen kognitiven Entwicklungsaufgaben große Bedeutung, weil sie es erlauben, die Vorhersagen der

(1) Eine Literaturübersicht findet sich in dem Text...
"Was wissen Vorschulkinder über Zahlen? Wichtige Indikatoren"

drei Theorien der Zahlentwicklung hinsichtlich der Reihenfolge verschiedener Konzeptbereiche bzw. Aufgabenklassen in der Entwicklung zu prüfen. Interindividuelle Vergleiche zwischen den Altersgruppen schließlich sollen es ermöglichen die relative Schwierigkeit der Aufgabengruppen für Kinder in dem untersuchten Altersbereich aufzuklären.

Bei den Teilprozessen des Zahlbegriffs sollen durch eine qualitative Analyse der Lösung des Kindes mögliche Komponenten des Lösungswegs ermittelt werden. Solche Hinweise müßten sich bei den Aufgaben zum kardinalen Vergleich (Zählen und Korrespondenz) aus einer detaillierten Beobachtung des kindlichen Lösungsverhaltens ergeben; bei vielen Aufgaben sind auch die Erklärungen des Kindes eine wichtige Informationsquelle (Zahlinvarianz, Ordination). Durch systematische Beobachtungen des Verhaltens und Aufzeichnungen über die Erklärung des Kindes dürften sich eine Vielzahl von interessanten Aufschlüssen über das kindliche Verständnis einer Aufgabe ergeben. Im intraindividuellen Vergleich lassen sich bei variierten Aufgabenbedingungen (vor allem bei Mengenvergleichen) konkurrierende Lösungsstrategien des Kindes vermuten (z.B. Zählen gegenüber der Korrespondenzrelation), die auch ein Indiz für die Flexibilität des Kindes im Lösungsprozeß sind. Variationen von Aufgabenfaktoren innerhalb einer bestimmten Aufgabe (z.B. Anzahl der Elemente in einer Kardinationsaufgabe) geben ebenfalls Anregungen dafür, welche Schwierigkeiten Kinder unterschiedlichen Alters mit einer Aufgabe haben. Aus der empirischen Literatur und den einzelnen Theorien der Zahlentwicklung lassen sich auch Hypothesen über die Präferenz eines Kindes für bestimmte Lösungswege ableiten (in Abhängigkeit von ihrer relativen Schwierigkeit). Demnach müßte im Sinne der ordinalen Theorie das Kind ordinale Strategien eher als kardinale bevorzugen, und nach Piagets Konzeption der Korrespondenzrelation, die sich seiner Ansicht nach aus einer Abstraktion der qualitativen Korrespondenz ableiten soll, müßte das Kind beim Vergleich von Mengen bevorzugt zählen, und wesentlich seltener bzw. relativ spät in der Entwicklung die Korrespondenzrelation anwenden.

Für die ordinale Theorie wird erwartet, daß im intraindividuellen Vergleich Ordinationsaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit Kindern stets leichter fallen als die Zahlinvarianzaufgabe und vergleichbare Kardinationsaufgaben. Die Zahlinvarianzaufgabe dient dabei als Operationalisierung des Zahlbegriffs. Kriterien, die die Vergleichbarkeit von Ordinations- und Kardinationsaufgaben formulieren, liegen allerdings nicht vor, so daß sich der Vergleich zwischen den Konzepten der Kardination und der Ordination vor allem auf die Standardaufgaben von Brainerd konzentrieren muß. Die kardinale Theorie der Zahlentwicklung macht keine präzisen Vorhersagen über die Priorität eines dieser Konzepte, zumindest ist aber eine Bewältigung des Ordinationskonzepts vor jenem der Kardination nicht zu erwarten. Auch Piaget sagt im Grunde eine synchrone Entwicklung beider Konzepte voraus (Brainerd, 1979).

Piaget spricht von ähnlichen Fehlern von Vorschulkindern bei den verschiedenen Konzeptbereichen (Seriation, Klassifikation und Zahlinvarianz). Beobachtungen bei verschiedenen Aufgaben aus diesen inhaltlichen Bereichen sollten verdeutlichen, wo Piaget solche Gemeinsamkeiten in den Fehlern des Kindes sieht. Piaget geht zugleich von der Parallelität in der Entwicklung der kognitiven Strukturen der Zahl, der Klassifikation und der Seriation aus (Piaget und Szeminska, 1975).

Zählfertigkeiten des Kindes bzw. sein Verständnis der inneren Ordnungsbeziehungen der natürlichen Zahlen begünstigen eine erfolgreiche Lösung des Kindes bei kardinalen Vergleichen, vor allem bei kleineren Mengen. Zählfehler werden als spezielle Kategorie bei Mengenvergleichen durch Zählen verwendet, um die Bedeutung der Zählfertigkeit des Kindes für die erfolgreiche Lösung der Aufgabe abzuschätzen. Zählfertigkeiten und Aufgaben zur Seriation der Zahlen (Aufreihen verschieden großer Mengen) müßte das Kind wesentlich früher als die Zahlinvarianz - als Repräsentant des Zahlbegriffs - erwerben (Saxe, 1979).

Die Reihenfolge der untersuchten Konzepte (Ordination, Zahlinvarianz,

Klassifikation etc.) in der Entwicklung ist nach den Ergebnissen aus der Piagetforschung der letzten zehn Jahre abhängig von den diagnostischen Auswertungskriterien, die für die Aufgabe gewählt werden. Deshalb werden in der vorliegenden Untersuchung für alle wichtigen Aufgaben Stadien nach alternativen Kriterien ausgewertet, einerseits nur aufgrund des (kognitiven) Urteils des Kindes, zum andern wird zusätzlich die Erklärung des Kindes mit betrachtet. Dieses Vorgehen erlaubt es, den Einfluß unterschiedlicher Stadienkriterien auf die vorhergesagten Entwicklungsbeziehungen zu untersuchen (vgl. zur allgemeinen Übersicht, S.A. Miller, 1978, Brainerd und Hooper, 1978). Werden die Vorhersagen der ordinalen Theorie bzw. der anderen Theorien der Zahlentwicklung trotz der Variation solcher Aufgabenkriterien bestätigt, können sie einen breiten Geltungsbereich für sich in Anspruch nehmen.

II. Aufbau und Durchführung der Untersuchung

1. Stichprobe

Die untersuchte Gruppe umfaßte insgesamt 138 Kinder, 36 Kinder mit 4 Jahren im Alter von 4;0 bis 4;9 ($\bar{x}$ = 52,3 Monate, 20 Mädchen und 16 Jungen), 51 5-jährige Kinder zwischen 4;10 und 5;9 ($\bar{x}$ = 63,7 Monate, 25 Mädchen und 26 Jungen) und 51 Kinder mit 6 Jahren zwischen 5;10 und 6;9 ($\bar{x}$ = 75,7 Monate, 28 Mädchen und 23 Jungen).

Kinder aus insgesamt 7 Kindergärten nahmen teil. In keinem der Kindergärten fand eine systematische Instruktion in mathematischen oder anderen akademischen Inhalten statt. Alle Kindergärten waren über verschiedene Stadtteile von Heidelberg verteilt und hatten sehr unterschiedliche soziale Einzugsgebiete. Die Auswahl der Kinder wurde anhand vorliegender Namenslisten nach Namen und Alter vorgenommen; der Testleiter hatte keine Entscheidung bei der ersten Auswahl der Kinder. Dadurch sollte die Auswahl vor allem jüngerer Kinder nach dem Grad ihrer "Testbarkeit" ausgeschlossen werden.

Zusätzlich wurde eine Gruppe von 30 dreijährigen Kindern untersucht (3;0 bis 3;11), die mit sechs ausgewählten Aufgaben aus der gesamten Aufgabensequenz beobachtet wurden. Auf Ergebnisse mit dieser kleinen Gruppe wird an den entsprechenden Stellen im Ergebnisteil eingegangen.

2. Versuchsleitertraining

Um eine hohe Zuverlässigkeit bei der Durchführung der Aufgaben und der Kodierung der Antworten des Kindes zu erreichen, wurden die studentischen Versuchsleiter (7) intensiv trainiert. Der Zeitaufwand für dieses Versuchsleitertraining umfaßte 12 bis 15 Stunden für jede Person. Die Versuchsleiter wurden mit dem Aufgabenmaterial und den Instruktionsbögen vertraut gemacht, Besonderheiten bei jeder Aufgabe wurden erörtert und die Bedeutung verschiedenartiger Antworten des Kindes dargestellt. Um die Studenten mit den Reaktionen des Kindes vertraut zu machen, wurden typische Antworten des Kindes anhand des Versuchsmaterials vorgeführt. Besonderes Gewicht wurde auf die Hilfestellungen gelegt, die bei einzelnen Aufgaben eingeführt wurden, um das

Verständnis des Kindes für die Aufgabe zu prüfen und ein falsches Auffassen der Instruktion durch das Kind zu vermeiden. Abschließend wurde die Steuerung des Kindes und die Darbietung der Belohnung für jede Aufgabe (in Form von bunten Sternen) diskutiert.

Um die Vertrautheit mit den Aufgaben noch zu erhöhen, führten einzelne Versuchsleiter (z.T. unter Supervision) wechselseitig Rollenspiele durch, in denen sie die Instruktionssequenz und die angemessensten Antworten des Versuchsleiters auf ungewöhnliche Antworten des Kindes übten (Bsp.: Zu welchem Zeitpunkt wird eine Aufgabe abgebrochen? Welche Hilfestellung darf bei dieser Aufgabe gegeben werden? Welche Eigenarten zeigen Kinder bei der Lösung dieser Aufgabe?). Diese Übungen wurden ergänzt durch längere Beobachtungen der Versuchsleiter bei der Durchführung einer Testsequenz mit einem Kind innerhalb des jeweiligen Kindergartens. Diese Beobachtungen dienten dazu, Verbesserungsvorschläge zu machen, z.B. für ein flexibleres Verhalten des Versuchsleiters, wenn das Kind keinen Antwortversuch macht (Umformulieren der Fragen, begrenzte Hilfestellungen) oder für Zusatzfragen, die das Verständnis des Kindes bei der jeweiligen Aufgabe weiter prüfen konnten.

Alle diese Vorbereitungen dienten dazu, das Verhalten der Studenten im Umgang mit dem Kind so natürlich wie möglich zu machen, so daß das Kind die Aufgabensequenz als spielerische Auseinandersetzung mit verschiedenen Aufgabenmaterialien verstehen konnte und zugleich der Versuchsleiter in der Testsituation nicht unter Leistungsdruck geriet. Besonders für die jüngeren Kinder sind solche Vorbereitungen wichtig.

Der VL. mußte in der Testsituation eine Vielzahl von verschiedenen Aspekten beachten und mußte daher mit den Aufgaben geschickt umgehen können (Bereitlegen des Testmaterials, das Material in richtiger Reihenfolge vorlegen und dazu die Instruktion in wörtlicher Form geben, das Kind in der Testsituation steuern, Kodieren der Antworten des Kindes, Belohnen).

Um sich mit den Kindern selbst vertraut zu machen, hielten sich die Versuchsleiter vor Durchführung der eigentlichen Untersuchung einige Vormittage im Kindergarten auf und beteiligten sich am Gruppenspiel. Dadurch sollte es auch ermöglicht werden, daß die jüngsten Kinder vertraut im Umgang mit den Studenten werden.

3. Beschreibung der verwendeten Aufgaben

Da es Ziel der Untersuchung war, systematische Entwicklungsbeziehungen zwischen einer Reihe qualitativer kognitiver Aufgaben zu untersuchen, wurde ein breites Spektrum von Aufgaben zur Kardination (Mengenvergleich durch Zählen, Korrespondenz und Wahrnehmungsurteile), Ordination (vorwiegend zum Bereich der Längenserialisation), Zählaufgaben und die Zahlinvarianzaufgabe, sowie Klassifikationsaufgaben miteinbezogen.

Die nachfolgende Beschreibung der Aufgaben beschränkt sich auf die wichtigsten Bestandteile des Aufbaus der Aufgaben und ihrer Kodierung und Auswertung. Ausführliche Darstellungen der Aufgaben enthalten die Instruktionsbögen der Kinder, die die wörtlichen Instruktionen, kurze Beschreibungen des Versuchsmaterials und Beobachtungsschemata für jede Aufgabe enthalten, um Erklärungen und beobachtbares Verhalten des Kindes festzuhalten. Daneben wurde die Kodierung der Antworten anhand eines ausführlichen Auswertungsschemas vorgenommen, indem numerische Kodierungen für korrekte Lösungen des Kindes, Schemata für die Kodierung bestimmter Verhaltensweisen des Kindes, Kategorien für die Einordnung der Erklärung und schließlich Stadienkriterien für wichtige Aufgaben nach Piaget festgelegt sind. Schließlich liegen Kriterien für die weitere Verarbeitung der Variablen, die sich aus einzelnen Aufgaben ableiten, in einem Variablenschema vor (1).

Die Kategorien für die Erklärungen der Kinder wurden induktiv gebildet; aus den Protokollen der Voruntersuchung und 40 zufällig gewählten Protokollen der Hauptuntersuchung wurden systematisch alle Antworten der Kinder gesammelt, geordnet und die Kategorien später auf die Reliabilität ihrer Kodierung untersucht. (2)

-
- (1) Instruktionsbögen und Auswertungsschema umfassen insgesamt 60 S. und können auf Wunsch zugänglich gemacht werden.
 - (2) Prof. F.E. Weinert hat freundlicherweise bei der Auswertung der ausgewählten Protokolle mitgearbeitet und Vorschläge für die Bildung von Kategorien gemacht. Diese Diskussionen trugen dazu bei, die Definitionen der Kategorien zu präzisieren.

Die Beschreibung der Aufgaben wird hier äußerst beschränkt, nur zentrale Aspekte der Instruktion und Auswertung werden erwähnt. Die Aufgaben wurden in fester Reihenfolge dargeboten; die Position in der Darbietung kann der Zahl hinter der jeweiligen Aufgabe entnommen werden.

Kardinationsaufgaben:

Nichtäquivalenz durch Zählen: Dem Kind werden weiße Karten (40 x 13 cm) mit 5 und 7 in einer Reihe aufgeklebten blauen Steinen vorgelegt. In der Instruktion wird es gebeten, die Menge 5 bzw. 7 mit einer Menge von 6 roten Spielsteinen zu vergleichen. Dabei fordert der Vl. es gezielt auf, erst die eine Menge zu zählen, dann die zweite, und erst dann fragt er nach der Größenrelation. Nachdem das Kind die Teilmengen verglichen hat, wird es nach der Größenrelation zwischen den nicht unmittelbar verglichenen Mengen 5 und 7 gefragt (Transitivität). Für die Auswertung werden richtige Teilmengenvergleiche (2 Punkte) und korrekte Beantwortung der Transitivität festgehalten. In die dichotome Kodierung der Aufgabe gehen beide Aspekte ein. Daneben werden für die Erklärungen des Kindes im Anschluß an sein Transitivitätsurteil Kategorien gebildet (für Beispiele siehe unten). Schließlich werden Besonderheiten der Lösung aufgezeichnet (z. B. doppeltes Zählen, Lösungen über Korrespondenz) (Vgl. Russac, 1978). (4)

Äquivalenz durch Zählen: Vier weiße Karten mit 3, 5, 7 und 9 aufgeklebten Steinen (in einer Reihe angeordnet) werden verwendet. Das Kind zählt zuerst auf Aufforderung die blauen Steine auf der Karte, dann soll es aus einer beliebigen Menge mit roten Steinen genausoviele neben die blauen in eine Schale legen. Beobachtet wird das korrekte Zählen der 1. Teilmenge (0 - 4) und das Herstellen der Vergleichsmengen (0 - 4). Qualitative Besonderheiten der Lösung des Kindes werden in 8 verschiedenen Verhaltenskategorien festgehalten. Für die dichotome Kodierung der Aufgabe muß das Kind alle vier Vergleichsmengen richtig herstellen (vgl. Russac, 1978). (17)

Nichtäquivalenz durch Korrespondenz: Verwendet werden weiße Karten (40 x 13 cm), auf denen Mengen mit 5, 7 und 9 blauen Spielsteinen in einer Reihe aufgeklebt sind. Das Kind wird gebeten, eine vorgegebene Vergleichsmenge (6 bzw. 8 Steine) jeweils mit den blauen Steinen über die Korrespondenzen zu vergleichen. Zunächst bittet man dazu das Kind zu jedem blauen Stein einen roten zu legen; nachdem das Kind alle roten Steine ausgelegt hat, fragt man es nach der Größenbeziehung der Mengen (Sind es mehr rote oder mehr blaue Steine oder gleichviele?). Auf diese Weise nimmt das Kind insgesamt 4 Vergleiche vor (0 - 4). Zusätzlich fragt man anschließend bei verdeckten blauen Karten, welche der beiden Mengen von blauen Steinen größer seien. Das Kind muß hierzu die Größenbeziehung zur mittleren Vergleichsmenge erinnern, da es die Mengen mit blauen Steinen nicht unmittelbar verglichen hat (Frage nach der Transitivität der Mengen 0 - 2 Punkte). Für die qualitative Bewertung der Aufgabe dienen zwei Kategoriensysteme: das erste beschreibt die qualitativen Lösungsstrategien (z.B. auch Zählen) und Erklärungen des Kindes beim Vergleich der Teilmengen durch Korrespondenz (6 Kategorien); das zweite Kategoriensystem bildet die Erklärungen des Kindes nach seinem Transitivitätsurteil ab (auf die Frage: wie hast du das gefunden oder gewußt?). (7)

Äquivalenz durch Korrespondenz: Die Aufgabe umfaßt folgende Materialien: drei weiße Karten (30 x 2,5 cm) auf denen 3, 5 und 7 rote Steine aufgeklebt sind. Dazu kommt eine beliebig große Menge von weißen Spielsteinen. Das Kind wird gebeten, auf die Karte genausoviele weiße Steine zu legen, wie dort rote sind, damit beide Mengen gleichviele Steine haben. Durch die Gestaltung der weißen Unterlage kann das Kind die weißen Steine nur zwischen die roten Steine legen (die in einem Abstand von etwa 3 cm nebeneinander angeordnet sind). Drei richtige Lösungen zu jeder Teilmenge sind möglich (0 - 3). Nach Abschluß dieser Aufgabe nimmt man weiße Elemente weg, die das Kind an einem Ende der Reihe überstehen ließ (nur für die Karte mit 7 roten Steinen), um zu sehen, ob es die Größenrelation zwischen den Mengen nach

dieser "Subtraktion" noch abschätzen kann (0 - 1 richtige Antworten).

Um qualitative Lösungsstrategien des Kindes zu erfassen, werden 6 Beobachtungskategorien verwendet. Sie umfassen sehr typische Lösungen des Kindes: z.B. es füllt nur die Zwischenräume zwischen den roten Steinen (ein weißer Stein zu wenig), oder es fügt auf beiden Enden der Reihe einen weißen Stein an (ein weißer Stein zuviel). Nachdem man am Ende der zweiten Teilaufgabe die weißen Elemente am Ende weggenommen hat, bittet man das Kind zu erklären, wie es die Größenrelation zwischen den Mengen gefunden hat. Typische Beispiele der Erklärung sind Zählen, Hinweise des Kindes auf die Länge der Reihe, Hinweise auf die Steine am Ende der Reihe oder - besonders häufig - Beschreibungen des Wegnehmens eines oder mehrerer Elemente (6 Kategorien) (zu beiden Aufgaben vgl. Stock & Flora, 1975; Russac, 1978). (8)

Räumliche Korrespondenzaufgabe: Karten, auf denen kleine Figuren aufgeklebt sind (Männer und Frauen) werden dem Kind vorgelegt (die Karten enthalten 3 Männer mit 3 Frauen, 5 Frauen mit 6 Männern, 7 Männer mit 8 Frauen). Man erzählt dem Kind, Männer und Frauen gingen zusammen spazieren, und bittet es nachzusehen, ob jeder Mann eine Frau dabei hat (oder umgekehrt). Dann wird es gefragt, ob denn auf der ganzen Karte mehr Männer sind oder mehr Frauen oder ob es gleichviele sind. Neben den korrekten Antworten wird die Erklärung des Kindes, wie es seine Lösung gefunden habe (6 Kategorien) aufgezeichnet. (14)

++++++

Zur Veranschaulichung der Kategorien, die bei den Kardinationsaufgaben verwendet werden, werden im folgenden die Definitionen und Erläuterungen zu den wichtigsten Erklärungskategorien aufgeführt, die bei allen Aufgaben, wenn auch mit recht unterschiedlichem Gewicht, eine Rolle spielen.

Kategoriendefinitionen (Kardinationsaufgaben)

Hinweis auf mittlere Vergleichsmenge

Das Kind beschreibt explizit die Größenrelationen zwischen den drei beteiligten Mengen und Größen, wobei die mittlere Menge als Bezugspunkt vorkommt ("das ist größer als das in der Mitte und das da kleiner als die in der Mitte").

Unbestimmte Mengenangabe

Das Kind beschreibt eine Menge als größer als die andere, ohne eine genauere Begründung für die Größenrelation zu geben. Insbesondere nennt es weder absolute Zahlen noch begründet es den Größenunterschied durch Transitivität.

Räumliche Hinweisreize

Je nach Reizanordnung weist das Kind auf wichtige räumliche Reize hin, die für sein Mengen/Größenurteil von Bedeutung sind. Dazu gehören Hinweise auf die Länge der angeordneten Reihe von Steinen, auf ihre Dichte, sowie auf die räumliche Dimension der Unterlage, an der das Kind versucht, sein Mengen- oder Größenurteil festzumachen. Gegebenenfalls werden diese Dimensionen weiter differenziert (z.B. Größen- bzw. Gewichtsunterschiede bei der Ordinationsaufgabe) bzw. die Zuordnung zur Reizanordnung beachtet (z.B. Länge der Unterlage).

Benennen absoluter Zahlen/Zählen

Nennt das Kind die richtigen absoluten Zahlen für die Mengen bzw. kann man deutlich beobachten, wie es zählt, wird diese Kategorie aufgezeichnet. Implizit wird stets angenommen, daß das Kind gezählt haben muß, wenn es die exakten Zahlen der zu vergleichenden Mengen kennt. Für einzelne Aufgaben wird der beobachtbare Zählvorgang jedoch getrennt kodiert. Beim Zählvorgang werden bei einzelnen Aufgaben explizit Lösungsansätze des Kindes unterschieden. Dazu gehören Zählfehler, erneutes Zählen einer Teilmenge, doppeltes Zählen beider Teilmengen und leises Zählen.

Eins-Zu-Eins-Korrespondenz

Diese Kategorie wird dann kodiert, wenn das Kind entweder durch Gesten oder durch sprachliche Beschreibung deutlich macht, daß immer zwei Gegenstände zusammengehören. Die Reizanordnung unterstützt die Korrespondenz teilweise, so daß man auf den Sinn der Äußerung des Kindes genau achten muß (z.B. "es stehen immer zwei zusammen" bei der Aufgabe zur räumlichen Korrespondenz). Bei den Aufgaben, in denen vom Kind explizit eine Korrespondenz verlangt wird (bei der Zahlinvarianzaufgabe und Äquivalenz durch Korrespondenz), wird das Herstellen der Korrespondenzrelation nur kodiert, wenn das Kind im beobachtbaren Verhalten auf die Eins-Zu-Eins-Korrespondenz hindeutet (z.B. immer zwei Steine zusammenschieben,

Antippen der Steine erfolgt paarweise). Bei Aufgaben, in denen das Kind das Fehlen eines Steines durch die Korrespondenzrelation feststellen muß, wird der deutliche Hinweis auf die überstehende Figur bzw. die fehlende Figur als Korrespondenz kodiert.

Zahlinvarianzaufgabe: Für die Zahlinvarianzaufgabe dienen 7 rote und 7 blaue runde Holzteile. Zunächst wird beobachtet, ob das Kind die Eins-Zu-Eins-Korrespondenz zwischen den einzelnen Elementen richtig herstellt. Dazu wird auch die Erklärung des Kindes erfragt (4 Kategorien: Hinweis auf die Länge der Reihen, auf die Eins-Zu-Eins-Korrespondenz, auf Zählen, oder intuitive Antwort). Zwei Transformationen werden anschließend mit einer der Mengen durchgeführt: eine Reihe wird zusammengeschoben bzw. auseinandergezogen. Die Beurteilung des Mengenvergleichs nach der Transformation wird mit der Fragetechnik nach Rothenberg (1969) geprüft (man fragt das Kind, ob es noch gleichviele rote und blaue Steine sind, ob eine Menge mehr sei, ob eine Menge weniger sei, wobei die Fragen in zufälliger Reihenfolge gestellt werden). Für die Auswertung wird die Anzahl korrekter Urteile festgehalten (0 - 6 bei 2 Transformationen) und die Erklärung des Kindes wird anhand von 7 Kategorien eingestuft (drei operationale Erklärungen: Hinweise auf Transformation, auf Kompensation, auf Korrespondenz bzw. Addition/Subtraktion, auf Reversibilität; unspezifische Begründungen; präoperationale Antwort vor allem Hinweise auf die Länge; schließlich Zählen).

Zusätzlich werden für die Aufgabe Stadienkriterien festgelegt. Die Stadien nach Piaget beziehen Urteile und Erklärungen des Kindes mit ein (Stadienbeschreibung: S 1: maximal zwei Urteile richtig, präoperationale Erklärung; S 2: maximal vier richtige Urteile, Erklärung kann inkonsistent sein zwischen operational und präoperational; S 3: mindestens 5 Urteile richtig, operationale Erklärung). Die Stadien nach Brainerd berücksichtigen nur die Urteile des Kindes (Stadien S 1: max. 2 Urteile; S 2: 3 - 4 Urteile richtig; S 3: 5 - 6 Urteile richtig). Alle Antworten der Kinder werden anhand beider Stadienkriterien eingestuft.

Zusätzlich wird eine Variation der Zahlinvarianzaufgabe, die Aufgabe zur qualitativen Korrespondenz, durchgeführt, bei der sich die gegenüberstehenden Elemente einer Menge jeweils gleichen (z.B. zwei Häuschen, zwei Fische usw., insgesamt 7 Objekte). Es wird ebenfalls eine Transformation (Auseinanderziehen) vorgenommen und das Urteil des Kindes und seine Erklärung nach den obengenannten Kriterien eingestuft. Die Stadienkodierung erfolgt lediglich nach den Stufen Piagets. (5)

Kardinationsaufgabe (nach Brainerd): Die Kardinationsaufgabe besteht aus sechs Karten (20 x 6,5 cm) mit zwei Reihen parallel zueinander angeordneter verschiedenfarbiger Reihen von Steinen.

Die ersten vier Karten enthalten verschieden große Mengen aus 4, 6 bzw. 8 Steinen in unterschiedlicher Zusammenstellung, wobei zusätzlich noch Länge- und/oder Dichteunterschiede zwischen den Reihen bestehen. Die beiden letzten Karten enthalten jeweils gleichgroße Mengen, die sich aber in ihrer Länge unterscheiden. Das Kind wird gebeten, zu beurteilen, ob die beiden Mengen gleich groß sind oder nicht ("Sind es mehr rote oder mehr schwarze oder gleichviele", wobei die drei Bestandteile der Frage nach Zufall in ihrer Reihenfolge variiert werden).

Diese Aufgabe wird nun den 5- und 6-jährigen Kindern dargeboten, da zu erwarten ist, daß vierjährige Kinder kaum richtige Lösungen finden. Zusätzlich wird eine Variation in die Aufgabe eingeführt, um die Bedeutung der Korrespondenzrelation zu untersuchen. 60 % der Kinder (61 von 102) wird die Aufgabe ohne Stäbchen dargeboten, und 100 % (102) mit Stäbchen. Stäbchen verbinden jeweils zwei Elemente der verschiedenen Mengen. Die Zuordnung der Kinder zur ersten Aufgabe erfolgt nach Zufall und versucht lediglich Alter und Geschlecht vergleichbar zu halten. In einer kleinen Zusatzstudie wird 30 Kindern neben der Aufgabe ohne Stäbchen auch die Aufgabe mit Stäbchen vorgelegt, um einen Hinweis auf die intraindividuelle Schwierigkeitsbeziehung der Aufgabe zu haben.

Für die Kodierung werden die richtigen Urteile des Kindes bei

jeder Teilaufgabe festgehalten (0 - 6). Bei der Aufgabe mit Stäbchen werden auch Erklärungen des Kindes mit ausgewertet (3 Kategorien: Hinweis auf die Korrespondenz aufgrund der Stäbchen, unbestimmte Erklärung, Hinweis auf Länge/Dichte). Für die Gesamtaufgabe sind Stadien nach dem Schema Brainerds festgelegt (S 1: 0 - 2 korrekte Urteile; S 2: 3 - 5 korrekte Urteile; S 3: alle Urteile korrekt); die gleiche Zuordnung wird für die Aufgabe mit Stäbchen gewählt. In der dichotomen Kodierung der Aufgabe wird das Erreichen von Stadium 3 als korrekte Lösung der Gesamtaufgabe eingestuft (= 1) (vgl. Brainerd, 1973, Brainerd und Fraser, 1975). (10)

Klassifikationsaufgaben

Zuordnungsaufgabe : Die Zuordnungsaufgabe besteht aus zwei Gruppen von Gegenständen, einerseits Bilder anschaulicher Gegenstände (Fische, Blumen, Schmetterlinge etc.) und geometrische Formen. Die Gegenstände sind so zusammengestellt, daß sie nach zwei Dimensionen (Farbe und Form) geordnet werden können. Das Vergleichsobjekt, das der Versuchsleiter stets in der Hand behält, kann man sowohl den Gegenständen gleicher Form als auch denen gleicher Farbe zuordnen (mehrere Klassifikationen). Der Versuchsleiter bittet das Kind ihm ein Bild zu geben, das zu dem in seiner Hand paßt. Hat das Kind ein Bild gewählt, stellt er erneut die Frage usw.. Für die Bewertung der Aufgabe, wird die Sequenz der Bilder bzw. geometrischen Formen aufgezeichnet, die das Kind auf die Fragen des VL. anbietet. Dabei wird kodiert, wie konsistent das Kind antwortet (es kann z.B. dreimal nacheinander nach der Farbe zuordnen) und ob es, wenn die Klassifikation erschöpft ist, auf die andere Dimension übergeht (nach der Farbe wählt es nun Objekte nach der Form). Zusätzlich wird aufgezeichnet, ob das Kind die Dimension nach der es zuordnet, auch spontan benennt.

Für die dichotome Kodierung dieser Aufgabe muß das Kind einen Dimensionswechsel von Farbe nach Form (oder umgekehrt) vornehmen und mindestens einmal die Dimension benennen, nach der es zuordnet (vgl. Campbell, Donaldson und Young, 1976). (2)

Qualitative Korrespondenz (Klassifikation)

Das Aufgabenmaterial besteht aus zwei Karten (24 x 12 cm) auf denen drei geometrische Formen verschiedener Farbe und Form aufgeklebt sind. Im ersten Durchgang bekommt das Kind drei weitere geometrische Formen, die jeweils einer der Formen auf der Karte zugeordnet werden sollen. Das Material ist so konstruiert, daß diese Zuordnung im ersten Durchgang nur nach der Farbe erfolgreich durchgeführt werden kann, im zweiten Durchgang nur nach der Form. Für die Bewertung der Aufgabe ist wichtig, wieviele Figuren das Kind im jeweiligen Durchgang korrekt zuordnet (z.B. im 1. Durchgang nach der Farbe) und ob es die Dimension, nach der es die Objekte gewählt hat, benennen kann. Daneben ist von Interesse, ob das Kind einen Dimensionswechsel vom ersten zum zweiten Durchgang, also von Farbe nach Form vornehmen kann, denn es ist gerade dieser Wechsel der Dimension, der jüngeren Vorschulkindern Schwierigkeiten machen müßte. Schließlich wird aufgezeichnet, ob das Kind in einer der Teilaufgaben figurale Kollektionen im Sinne von Inhelder und Piaget (1973) legt, z.B. ein Häuschen, ein Männchen etc.. Die dichotome Kodierung der Aufgabe schließt ein, daß das Kind einen Dimensionswechsel vorgenommen hat, und mindestens einmal die Dimension korrekt benennt, nach der es zuordnet. (12)

Dichotomisierung

Das Material besteht aus geometrischen Formen (Quadrat und Dreieck), die sich auch noch in der Farbe (rot oder gelb) unterscheiden. Das Kind wird gebeten, die Klötzchen zu ordnen und zwar so, "daß es zwei Häufchen gibt", und man zeigt dem Kind durch Gesten, wo es die beiden Gruppen von Gegenständen anordnen soll. Das Kind kann eine Klassifikation nach der Farbe oder nach der Form vornehmen. Eine mehrfache Klassifikation wird nicht verlangt.

Für die Bewertung der Aufgabe wird einmal aufgezeichnet, ob das Kind die Gegenstände konsistent nach einem Kriterium im ersten und/oder im zweiten Durchgang ordnen kann. Neben der Dimension nach der das Kind ordnet, wird dazu auch die Benennung der Dimension festgehalten. Schließlich ist natürlich wichtig, ob das

Kind im ersten und zweiten Durchgang nach der gleichen Dimension klassifiziert (z.B. nach der Farbe) oder ob es in der Lage ist, einen Dimensionswechsel vorzunehmen. Qualitative Besonderheiten der Lösung des Kindes, die beachtet werden, sind figurale Kollektionen im Sinne Piagets (z.B. ein Männchen legen) und Variationen von Farben und Formen, die manche Kinder legen, wenn sie keine Dichotomisierung zustande bringen. Für die dichotome Kodierung der Aufgabe muß das Kind den Dimensionswechsel angemessen durchführen und eine der Dimensionen, nach denen es geordnet hat, benennen. (6)

Ordinationsaufgaben

Identifikation einzelner Elemente in einer Seriationsaufgabe

Das Aufgabenmaterial besteht aus fünf Karten, auf denen vier verschieden große Clowns aufgemalt sind. Im ersten Durchgang bekommt das Kind die Clowns nach ihrer Größe dargeboten. Den kleinsten (bzw. den zweitkleinsten) Clown stellt man dem Kind vor (z.B. das ist der Max) und bittet das Kind, Max auf den nachfolgenden Bildern zu suchen. Auf diesen Bildern ist die Position der Clowns systematisch verändert, so daß das Kind die Größenbeziehungen rekonstruieren muß, um den jeweiligen Clown zu finden. Obwohl der kleinste Clown dabei kaum Schwierigkeiten machen dürfte (0 - 4 richtige Antworten sind möglich), ist die Fähigkeit des Kindes, den zweitkleinsten Clown jeweils zu identifizieren von Interesse (0 - 4 Antworten möglich). Eine dichotome Kodierung schließt die Lösung der Gesamtaufgabe (8 Antworten) ein. (4)

Ordinationsaufgabe (Längen- und Gewichtsordination)

Der Aufbau dieser Aufgabe folgt streng der Anordnung von Brainerd (z.B. 1973). Für die Längenordination legt man dem Kind drei Stäbe vor (19,5 cm, 20 cm, 20,5 cm), wobei es jeweils zwei der Stäbe vergleichen kann, und dann auf die Größenbeziehung zwischen den beiden nicht unmittelbar verglichenen Stäben schließen soll. Bei der Gewichtsordination gibt man dem Kind drei Kugeln,

zwei rote und eine gelbe (50 g, 100 g und 150 g), und läßt es jeweils die roten Kugeln mit der gelben vergleichen. Das Kind soll aus diesen Vergleichen die Gewichtsbeziehung zwischen den roten Kugeln (50 g und 150 g) erschließen.

In die Kodierung geht ein: die Anzahl der korrekten Vergleiche bei den Teilaufgaben (jeweils 0 - 4 korrekte Antworten) und die richtige Beantwortung der Transitivitätsfrage (0 - 2 Antworten). Beide Aufgaben werden in zwei Durchgängen dargeboten; im zweiten Durchgang wird das Material um 180° verdreht.

Neben den Urteilen des Kindes werden die Erklärungen in insgesamt 5 Kategorien eingeordnet (nämlich intuitive Antworten, Hinweis auf die Größe der Kugel, Beschreibung der transitiven Beziehung, ungenauer Hinweis auf Gewichts-/Längenbeziehung, und Hinweis auf das absolute Gewicht/Länge eines Elements).

Für die Stadiendefinitionen werden zwei Klassifikationen unterschieden. Die Stadien nach Brainerd schließen nur die Anzahl der korrekten Transitivitätsurteile des Kindes ein, wobei zusätzlich auch die Zahl der Teilvergleiche vor dem eigentlichen Transitivitätsurteil hinzugezogen wird (Definitionen S 1 : 0 - 1 korrekte Transitivitätsurteile; S 2 : 2/3 korrekte Urteile; S 3 : 4 korrekte Urteile). Bei der Kodierung nach Piaget wird zusätzlich die Erklärung des Kindes beachtet (für das Stadium 3 muß das Kind die Transitivitätsantwort angemessen erklären; dafür existiert in den Erklärungskategorien eine eigene Kategorie). (11)

Einfügen von Stäben in ein aufgereihtes Muster (Stabaufgabe)

Das Material zu dieser Aufgabe besteht aus zwei großen Karten, auf denen vier verschieden große Stäbe (Längenunterschiede 1 bzw. 2 cm) aufgeklebt sind. Aus insgesamt vier anderen Stäben soll das Kind den Stab heraussuchen, der in die mittlere Position innerhalb der 4 Stäbe paßt. Neben den richtigen Lösungen wird kodiert, ob man dem Kind eine Hilfestellung geben muß (nämlich dann, wenn das Kind völlig beliebig legt, ohne ein Verständnis der Instruktion zu zeigen). Die Vergleichsstrategien des Kindes im beobachtbaren Verhalten mit den Nachbarstäben werden

nach dem Schema von Moore und Gallagher (1973) aufgezeichnet (kein Vergleich mit Nachbarstab, Vergleich mit Nachbarstab ohne genauen Bezugspunkt, Vergleich mit einem Nachbarstab mit genauen Bezugspunkt, Vergleich mit beiden Nachbarstäben mit genauen Bezugspunkt beim Anlegen). Daneben wird die Erklärung des Kindes anhand von insgesamt 6 Kategorien geordnet (z.B. Hinweis auf die Größenbeziehung zu den losen Stäben, Hinweis auf die Größenbeziehung zu den festen Stäben, Hinweis auf Treppenform der Anordnung usw.).

Aus den Antworten des Kindes werden wieder qualitative Stadienkriterien abgeleitet. In die Stadien ohne Erklärung fließt nur ein, welche beobachtbaren Vergleichsstrategien das Kind zeigt (für Stadium 2 muß es beide Stäbe korrekt finden und Ansätze zu Vergleichsstrategien zeigen, für Stadium 3 müssen beide Stäbe korrekt gelegt sein und systematische Vergleiche mit einem/beiden Nachbarstäben mit genauen Bezugspunkt beim Messen angewandt werden). Für die Stadienkriterien mit Erklärung wird zusätzlich die Angemessenheit der Erklärung des Kindes betrachtet (für Stadium 3 muß das Kind seine Vergleichsstrategie angemessen formulieren und/oder sehr systematische Vergleiche vornehmen). (9)

Traditionelle Seriationsaufgabe

Für diese Aufgabe muß das Kind sieben unterschiedlich lange Stäbe (Unterschied jeweils 0,5 cm) systematisch aufreihen, nachdem ihm der Versuchsleiter zuvor die richtige Anordnung gezeigt hat und die Stäbe anschließend durchgemischt hat. Zusätzlich läßt man das Kind zwei Stäbe in die bereits fertige Anordnung einfügen. Kodiert wird die Anzahl richtig gelegter Stäbe und die Zahl korrekt eingefügter Stäbe. Daneben wird die Lösungsart des Kindes in Stichworten festgehalten (z.B. das Kind geht systematisch vom kleinsten zum größten Stab vor). Stadienkriterien wurden wieder nach zwei Gesichtspunkten aufgestellt. Die quantitativen Stadienkriterien berücksichtigen nur die Zahl der korrekt aufgereihten und/oder eingefügten Stäbe (S 1 : maximal 3 Stäbe richtig aufgereiht; S 2 : maximal 5 Stäbe richtig aufgereiht und höchstens

ein Stab nach längerem Suchen eingefügt; S 3 : alle Stäbe richtig aufgereiht und beide Zusatzstäbe richtig eingefügt). Für die Stadien nach Piaget werden auch die Erklärungen des Kindes hinzugenommen. Die Erklärung erfragt man, wenn das Kind einen oder beide Stäbe in das bereits aufgereichte Muster von Stäben eingefügt hat (z.B. wie hast du das gemacht? Wie hast du den Stab gefunden?). Drei Kategorien sind für die Erklärung festgelegt (intuitive Antwort, Hinweis auf Treppenform, Hinweis auf Vergleich mit Nachbarstäben). Für die Stadien Piagets wird berücksichtigt, wie systematisch das Kind bei der Lösung vorgeht (bei Stadium 2 : das Kind muß lange suchen, bis es die Stäbe richtig zusammenfügen kann, es hat besondere Schwierigkeiten beim Einfügen neuer Stäbe) und ob es eine angemessene Erklärung gibt (bei Stadium 3 muß das Kind neben einer sehr systematischen Lösungsmethode eine angemessene Erklärung geben, indem es auf seinen Vergleich mit den Nachbarstäben hinweist). (15)

Treppenaufgabe

Man legt dem Kind sieben verschieden große Treppen vor (auf einer der Treppen liegt ein Apfel) und es wird gefragt, wieviele Treppen denn eine Schnecke hinaufsteigen müsse, um zu dem Apfel zu kommen. In dieser Anordnung finden zunächst drei Durchgänge statt (der Apfel liegt auf der Treppe 3, 6, 4). Anschließend werden die Treppen systematisch vermischt, und zwar kommt jeweils die letzte Treppe an die zweite Stelle (die Treppenfolge ist 1, 7, 2, 6, 3, 5, 4). Man erklärt dem Kind, daß die Treppen nun vermischt seien, aber es solle sich die Treppe so vorstellen, wie sie vorher ausgesehen hat (diese Instruktion wird insgesamt dreimal wiederholt). Dann bittet man das Kind herauszufinden, wieviele Treppenstufen die Schnecke auf der Treppe von vorhin hinaufsteigen müßte, um zu dem Apfel zu kommen. Das Kind muß sich für eine korrekte Lösung von dem ordinalen Aspekt lösen und versuchen, die Treppen vertikal zu zählen (kardinaler Aspekt).

Im zweiten Durchgang werden ebenfalls drei Durchgänge angeboten (Treppe 3, 7, 4). Besonderheiten im Verhalten des Kindes werden beobachtet (z.B. das Kind zählt jeweils nur die ordinale Position;

oder es nimmt jeweils eine Treppe weniger, weil es nur die Differenz der Stufen zählt; oder aber es gibt jedesmal die gleiche Antwort). Erklärungen sind anhand von 6 Kategorien eingestuft (z.B. intuitive Antwort, das Kind zählt horizontal, das Kind zählt vertikal an einer bestimmten ordinalen Position, es macht Zählfehler).

Die Stadienkriterien berücksichtigen, ob das Kind sich von der ordinalen Position der Treppen lösen kann (S 1 : Teile der ersten drei Teilaufgaben korrekt, keine Lösung nach dem Vermischen der Treppen; S 2 : erste drei Teilaufgaben richtig, im zweiten Teil der Aufgabe Ansatz zu vertikalem Zählen, losgelöst von der ordinalen Position; S 3 : erste drei Teillösungen richtig, bei den Durchgängen 4. bis 6. jeweils vertikales Zählen der Treppe und mindestens zwei Lösungen richtig). (16)

Zählaufgaben

Wahrgenommene Kardinalität

Das Kind bekommt Kärtchen mit jeweils 2, 3, 4 Bildern vorgelegt, einmal in einer Reihe angeordnet, das andere mal als Würfelfigur. Man bittet das Kind, die Größe der Menge abzuschätzen ohne zu zählen ("Du kannst ja bestimmt schon zählen! Kannst du mir aber jetzt sagen, wieviele Äpfel hier drauf sind, auch ohne zu zählen!"). Kodiert wird der Anteil korrekter Lösungen (0 - 6), die Zahl der Lösungen, bei denen das Kind dennoch zählt (0 - 6) und mögliche Zählfehler des Kindes. (1)

Seriation der Zahlen

Karten, auf denen zwischen einem und sechs Käfer in Würfelform angeordnet sind, werden dem Kind vorgelegt. Nachdem man die richtige Anordnung der Reihe gezeigt hat, legt man die Karte mit einem bzw. sechs Käfern an die Enden der Reihen und sagt: "Kannst du die anderen Karten jetzt richtig hinlegen, wie sie hier hingehören?". Der gleiche Durchgang wird wiederholt, nur ist diesmal die Karte mit sechs Käfern vorne und die Karte mit einem Käfer

am Ende der Reihe. Kodiert wird die Zahl der korrekt gelegten Karten und zwar nach ihrer serialen Position (z.B. 4 nach 3). Die Kodierung nach der räumlichen Position wurde nicht vorgenommen (z.B. das Kind legt die 3 an die Stelle der 3 in der zuvor gezeigten Anordnung), weil sie nur von ganz wenigen Kindern (insgesamt drei) beachtet wurde. Außerdem wird beobachtet, ob das Kind die Zahlen benennt. (13)

Beliebigkeit der Reihenfolge beim Zählen

Eine Reihe aus sechs verschiedenen Bildern liegt dem Kind vor. Nachdem es sie einmal abgezählt hat, legt man das erste Bild an das Ende der Reihe und fragt: "Wieviele sind es jetzt?"; dies wiederholt man bis alle Objekte einmal an letzter Stelle in der Reihe waren (also 6 Durchgänge). Kodiert wird, ob das Kind die Größe der Menge korrekt benennt und ob es zählt. Qualitative Besonderheiten der Lösung des Kindes werden anhand eines Kategoriensystems eingeordnet. Auf Niveau 1 zählt das Kind jeweils neu und behauptet bei Mengenänderungen auch die Größe der Menge habe sich verändert. Auf der Stufe zwei zählt das Kind jeweils neu, glaubt aber nicht mehr die Menge habe sich geändert. Auf Niveau 3 schließlich zählt das Kind nur einige Durchgänge ab und ist sich zugleich der Größe der Menge sicher. Schließlich auf Stufe 4 zählt das Kind nur ein einziges Mal und ist sich dann der Größe der Menge sicher. (18)

Zählaufgaben

Um die Genauigkeit des Zählens zu erfassen, werden dem Kind insgesamt 10 verschiedene Mengen von Gegenständen vorgelegt. Die Gegenstände sind jeweils in einer Reihe auf einer schmalen weißen Karte angeordnet, um irreführende räumliche Reize beim Zählen auszuschalten. Kodiert wird die Zahl der richtigen Lösungen bei den Mengen (3 (0 - 3), 5 (0 - 2), 7 (0 - 2), 11 (0 - 2), 19 (0 - 1)). Daneben werden qualitative Fehler des Kindes beim Zählen aufgezeichnet, z.B. Fehler in der Koordination der Zählprinzipien (Überspringen eines Gegenstands oder doppelt zählen des Bildes) oder Fehler in der Abfolge der Zahlwörter. Dazu kommen

Besonderheiten des Zählens, wie leise zählen, Abschätzen der Mengen etc.. Aus der Zahl der richtig gezählten Mengen wurde eine Kodierung für die Genauigkeit des Zählens abgeleitet (1 = 0 - 4, 2 = 5 - 8, 3 = 9 - 10). (19)

4. Durchführung der Untersuchung

Die Aufgabensequenz wurde dem Kind in einer festen Reihenfolge dargeboten. Die vier Testsitzungen eines Kindes wurden über einen Zeitraum von zwei Wochen verteilt und dauerten jeweils 10 - 20 Minuten. Der Versuchsleiter saß mit dem Kind an einem quadratischen Tisch und bot das Aufgabenmaterial in einer eindeutig festgelegten Folge an. Als Belohnung erhielt das Kind nach jeder durchgeführten Aufgabe (unabhängig vom Ergebnis) einen bunten Stern auf ein Kärtchen aufgeklebt. Alle Testsitzungen erfolgten vormittags im Kindergarten (1).

5. Auswertung der Reliabilität

Die Protokollbögen der Kinder wurden von einem systematisch trainierten Studenten anhand des ausführlichen Auswertungsschemas kodiert. Die Präzision der Zuordnung zu verschiedenen Kategorien wurde durch eine Vielzahl von Antwortbeispielen der Kinder erhöht. Zur Kontrolle der Reliabilität wurden die 10 am schwierigsten zu kodierenden Aufgaben ausgewählt und bei 50 Kindern von zwei weiteren Untersuchern kodiert. Während die numerischen Variablen (kognitive Urteile) eine perfekte Übereinstimmung zeigten (Produkt - Moment Korrelationen jeweils größer als .96), sind die Reliabilitätswerte für die Kategorien,

(1) Die Testaufgaben und die Aufgabensequenz wurden in einer Voruntersuchung an 25 Kindern erprobt. Die Beobachtungen in der Voruntersuchung erlaubten eine Vielzahl von Modifikationen, die dem Kind die Aufgabensituation anschaulicher machten. Auch wurden aus der Voruntersuchung Hilfestellungen für einzelne Aufgaben abgeleitet.

die die Erklärung des Kindes abbilden auch sehr zufriedenstellend (.89 bis .96 Übereinstimmungswerte).

6. Vorhersageanalyse - eine Methode zur Untersuchung von Entwicklungsmodellen

In der Entwicklungspsychologie werden kognitive Variablen oft durch Stadien, Unterstadien, Phasen oder qualitative Stufen abgebildet. Diese Klassifikation ist insoweit sinnvoll, als sie versucht, qualitative Unterschiede in den Lösungsprozessen von Kindern in eine bestimmte Rangordnung zu bringen. Untersucht man im Rahmen einer Querschnittstudie Beziehungen zwischen verschiedenen qualitativen Entwicklungsvariablen, so werden Wechselbeziehungen zwischen zwei Variablen typischerweise in Form von Kontingenztabellen dargestellt, deren Analyse Aufschluß über die möglichen Wechselbeziehungen zwischen den beteiligten Variablen geben soll. Unterstellt man den deskriptiven und/oder theoretischen Wert des Stadienkonzepts (Wohlwill, 1973, S. 190-191), so lassen sich für die Beziehung zwischen zwei Variablen alternative Modelle aufstellen, die die "Art der zeitlichen Koordination" vorhersagen, die "zwischen korrespondierenden Schritten mehrerer Sequenzen" von Stadien zu beobachten sind (Wohlwill, 1973, S. 205). Solche Modelle sind Ausdruck "idealer Zusammenhänge", die in der Entwicklung vorkommen können; in der empirischen Beobachtung findet man u.U. verschiedene Modelle in gemischter Form vor.

Wohlwill (1973, S. 205-215) diskutiert fünf solcher Modelle von Entwicklungsbeziehungen. Das anschaulichste ist das der "synchronen Entwicklung", das aus der strukturellen Stadientheorie herrührt. "Es unterstellt, daß alle der verschiedenartigen Teilsequenzen des Systems sich gleichzeitig miteinander in völlig rigider Form entwickeln" (Wohlwill, 1973, S. 207). Weitere Modelle postulieren eine horizontale Verschiebung zwischen kognitiven Variablen ("décalage horizontal"), wobei zwischen verschiedenen Stufen zweier Variablen regelmäßige zeitliche Verschiebungen beobachtet

werden (ein bestimmtes Niveau einer Variablen entwickelt sich stets vor dem vergleichbaren Niveau der anderen Variablen), die aber in eine synchrone Entwicklung bei anderen Niveaus eingebettet sein können. Das nächste Modell geht von der wechselseitigen Interaktion zwischen zwei kognitiven Variablen aus, so daß der Fortschritt des Kindes in einer Entwicklungsaufgabe unmittelbar auch die Entwicklung in der anderen beeinflusst. Ein letztes Modell (Ungleichgewicht und Stabilisierung) kann hier vernachlässigt werden, weil es eine komplexere Datenanalyse erforderlich machen würde, als die unterscheidbaren qualitativen Niveaus vieler Entwicklungsaufgaben erlauben würden.

Ordnet man zwei kognitive Variablen in einer Kontingenztafel an, kann man anhand der Verteilung der Reaktionen über die Tabelle prüfen, inwieweit das beobachtbare Verhalten einem bestimmten Stadienmodell entspricht. In einer "prototypischen Reaktionsmatrix" (Wohlwill) kann man "erlaubte Muster oder Kombinationen der Niveaus für Aufgabe A und B" definieren (Froman und Hubert, 1980, S. 138). In gleicher Weise werden dann Reaktionen, die außerhalb des zulässigen Musters fallen, als Fehlerzellen betrachtet, da sie die Interaktion zwischen Stufen beider Aufgaben enthalten, die für das postulierte Entwicklungsmodell nicht erwartet werden.

Ein besonderes Problem bei der Untersuchung solcher Entwicklungsbeziehungen ist die Definition der einzelnen Niveaus einer Aufgabe. Ein weiteres Problem ergibt sich, wenn zu vergleichende Aufgaben eine unterschiedliche Anzahl von Niveaus oder qualitativen Stufen enthalten. Es ist dann überaus schwierig zu entscheiden, wie man einzelne Niveaus zusammenfassen kann oder welche Schritte bei der Aufgabe sogar übergangen werden können, um für die zwei Entwicklungsaufgaben die gleiche Anzahl vergleichbarer qualitativer Stufen zu erreichen. Daneben ist es wünschenswert, eine günstige Zahl von Niveaus zu differenzieren, um das Modell im Verhalten des Kindes angemessen abgebildet zu finden. Ist die Zahl der Niveaus zu groß, kann die Unterscheidbarkeit zu benachbarten Schritten Schwierigkeiten machen (Wohlwill, 1973,

S. 214). Schränkt man die Anzahl der Niveaus dagegen ein, sinkt auch die Zahl unterschiedlicher Modelle, die anhand der Daten geprüft werden können.

Schließlich ist auch noch wichtig, inwiefern Niveaus von stets gleichem Rang definierbar sind, eine grundlegende Frage der Stadientheorie, die in der kognitiven Entwicklungspsychologie noch kaum Beachtung und noch weniger eine Lösung gefunden hat (z.B. Davison et al., 1980). Besondere Schwierigkeiten macht es, zeitliche Verschiebungen zwischen Konzepten ("décalage") zu untersuchen, wenn die Anzahl der unterschiedlichen Stufen kleiner oder gleich drei ist. Um unterschiedliche Modelle der "décalage horizontale", die Wohlwill erläutert hat, zu unterscheiden, benötigt man zumindest eine 4 x 4 - Kontingenztafel für zwei Entwicklungsaufgaben.

Entwicklungsvorhersagen, die anhand von Kontingenztafeln geprüft werden, erfordern auch angemessene statistische Methoden, um den Grad der Bestätigung für ein bestimmtes Entwicklungsmodell zu zeigen. Traditionelle Methoden, insbesondere Chi-Quadrat Methoden, sind für solche präziseren Prüfungen wenig geeignet (vgl. Wohlwill, 1973, S. 224; Hildebrand, Laing und Rosenthal, 1977). Eine andere Möglichkeit bieten spezielle Methoden, die den Grad der Assoziation in einer Kreuztafel prüfen (vgl. Light, 1973, Wohlwill, 1973, S. 224-225; Goodman und Kruskal, 1954, 1959; Mosteller, 1968) oder die Asymmetrie zwischen einzelnen Zellen in einer Tafel prüfen (z.B. Brainerds Binominalformel, Brainerd, 1973). Die Schwäche der meisten dieser Methoden ist, daß sie es nicht erlauben, den statistischen Kennwert im Sinne des postulierten Entwicklungsmodells zu interpretieren (Roberts, 1980).

Als elegantere statistische Methode bietet sich die Vorhersageanalyse ("prediction analysis") von Hildebrand, Laing und Rosenthal (1977) an. Diese Methode erlaubt den Vorhersageerfolg für ein bestimmtes Entwicklungsmodell zu prüfen, indem das erwartete Muster von Reaktionen mit dem beobachteten in Beziehung gesetzt wird. Wie früher erwähnt, sind Zellen, die im Sinne eines bestimmten Entwicklungsmodells nicht besetzt sein dürfen, Fehlerzellen,

d.h. diese Zellen "sollten keine Beobachtungen enthalten, wenn die Vorhersage sich perfekt in der Kontingenztabelle widerspiegelt" (Froman und Hubert, 1980, S. 138). Zellen, die überhaupt nicht besetzt sind (also Nullhäufigkeiten) unterstützen das Modell besonders gut; gerade die Analyse von solchen Nullzellen ist bei traditionellen Chi-Quadrat Methoden aber erschwert. Die Vorhersageanalyse vergleicht den beobachteten Wert in der jeweiligen Zelle der Kontingenztabelle mit dem erwarteten Anteil von Häufigkeiten, die bei statistischer Unabhängigkeit aus den Marginalien abgeschätzt werden. Der V_p -Wert ("Del") gibt dann die Vorhersagegenauigkeit des Entwicklungsmodells für die vorliegenden Daten an. Zusätzlich zu diesem Wert läßt sich auch die statistische Signifikanz dieses Wertes für eine bestimmte Stichprobenverteilung prüfen (Hildebrand et al., 1977, Chpt. 6). Um schließlich die Präzision einer Vorhersage miteinbeziehen zu können, kann die Anzahl der in der Analyse berücksichtigten Fehlerzellen und ihre erwarteten Häufigkeiten beobachtet werden (vgl. Froman und Hubert, 1980, S. 141-142). Eine detaillierte Darstellung der Methode kann man den angegebenen Quellen entnehmen.

Ein zentraler Bestandteil dieser statistischen Methode ist die "Forderung nach einer präzisen Formulierung der theoretischen Vorhersage" (Froman und Hubert, 1980, S. 145). Indem die Genauigkeit, mit der ein bestimmtes Entwicklungsmodell den Beobachtungsdaten angemessen ist, geprüft werden kann, kann sowohl die Information aus den erhobenen kognitiven Entwicklungsaufgaben besser verarbeitet werden, als auch eine Verbesserung der Entwicklungsmodelle, die eine präzisere Beschreibung der Wechselbeziehungen zwischen Aufgaben enthalten, unterstützt werden.

Die genaue Prüfung der Entwicklungsprioritäten zwischen gewissen kognitiven Aufgaben ist ein Charakteristikum sowohl von Piagets Theorie als auch verwandter Ansätze (z.B. Wang et al., 1971). Eine Schwäche vieler Untersuchungen der 60er und 70er Jahre ist die Verwendung von statistischen Methoden, die für eine präzisere Vorhersage von Entwicklungsbeziehungen kaum Informationen liefern. Froman und Hubert (1980) zeigen an zwei Beispielen, wie durch

Einsatz unzulänglicher Methoden, die nur einzelne Zellen analysieren, die behauptete Entwicklungspriorität bestätigt wurde, obwohl dieses Modell einer rigorosen Prüfung nicht standhält. Bedenkt man, wie anfällig die Häufigkeitsverteilungen in Kontingenztabellen für die Auswahl einer spezifischen Altersverteilung sind, ist es unglücklich, daß viele Entwicklungssequenzen und -beziehungen nur durch Methoden abgesichert sind, die mehr die "guten Absichten" (Froman und Hubert) des Experimentators als die statistische Validität ausdrücken.

III. Darstellung der Ergebnisse

1. Mengenvergleiche - Zählen und Korrespondenz als Lösungsstrategie

1.1. Ergebnisse für einzelne Aufgaben

Zunächst werden die Ergebnisse bei den einzelnen Kardinationsaufgaben diskutiert, ehe auf die Entwicklungsbeziehungen zwischen den Aufgaben eingegangen wird.

Äquivalenz durch Zählen

Bei dieser Aufgabe zählt das Kind zuerst die erste Teilmenge und wird dann vom Versuchsleiter gebeten, eine zweite, gleich große Vergleichsmenge herzustellen. Die Aufgabe ist vor allem für die jüngeren Kinder etwas schwieriger als das Abzählen zweier Mengen, die nebeneinander liegen, weil sie die zweite Vergleichsmenge aktiv herstellen müssen und dazu die Größe der ersten Menge im Gedächtnis behalten müssen. Zugleich helfen dem Kind bei seinem Urteil keine räumlichen Reize; sie werden durch die Art der Aufgabenstellung ausgeschlossen.

Welche Schwierigkeiten die jüngeren Kinder bei dieser Aufgabe haben, zeigen die Anteile korrekt hergestellter Vergleichsmengen für die drei Altersgruppen (4 Jahre: 30,5 % der Kinder stellen viermal die korrekte Vergleichsmenge her; 5 Jahre: 58,8 % und 6 Jahre: 70,6 %) ($\chi^2 = 15,9$, $df = 2$, $P < 0.001$). (1)

Von besonderem Interesse bei der Lösung dieser Aufgabe sind beobachtbare Fehler und besondere Strategien des Kindes. Für die Vierjährigen sind Zählfehler beim Herstellen der zweiten Menge relativ häufig (38,9 % gegenüber 19,6 % der 5-jährigen und 21,5 % der 6-jährigen, $\chi^2 = 8,5$, $df = 2$, $p < 0.05$); dennoch stellen

(1) Hier findet sich einer der wenigen beobachteten Geschlechtsunterschiede, zugunsten der Mädchen mit 4 Jahren ($t = 2,62$, $df = 30$, $p < 0.05$, $est w^2 = 0,144$).

immerhin 30 % aller Vierjährigen die vier Vergleichsmengen korrekt her, einschließlich der Menge mit neun Steinen. Die Häufigkeit der Zählfehler wächst erheblich mit der Größe der Menge (bei den Mengen 7 bzw. 9 machen 61 % bzw. 64 % der Vierjährigen Zählfehler).

Da die ältesten Kinder die erste Vergleichsmenge wesentlich häufiger korrekt herstellen (41,7 % der 4-jährigen, 78,4 % der 5-jährigen, 74,5 % der 6-jährigen), macht den jüngeren Kindern wohl neben dem genauen Zählen noch das Behalten der ersten Vergleichsmenge Schwierigkeiten. Betrachtet man sich diese Aufgabe in Schritten von drei Monaten, findet man, daß schon bei den jüngsten Kindern (40 - 42 Monate) mehr als ein Drittel diese Aufgabe korrekt lösen; dieser Anteil erhöht sich kontinuierlich mit zunehmendem Alter. Ab etwa 70 Monaten beobachtet man nur noch einzelne Kinder, die durch systematische Fehler bei der Aufgabe ganz oder zum Teil scheitern. Die qualitative Analyse der Verteilung der Lösungen des Kindes, vermittelt daher den Eindruck einer Fertigkeit, die sich mit zunehmendem Lebensalter kontinuierlich verbessert, so daß Zählfehler immer seltener werden (punktbiseriale Korrelation zwischen der dichotomen Kodierung der Aufgabe und den Lebensmonaten: $P_{bis} = 0,31$, $t = 3,84$, $df = 136$, $p < 0.0005$).

Qualitative Besonderheiten in der Lösung des Kindes vermitteln ein detaillierteres Bild von den Schwierigkeiten, die Vorschulkinder mit dieser Aufgabe haben. Obwohl Zählfehler die häufigste Kategorie sind, die für Besonderheiten in der Lösung des Kindes kodiert wurden, finden sich weitere Hinweise in anderen Lösungsstrategien des Kindes. Die jüngeren Kinder zählen gern die Mengen doppelt oder von neuem, um sich ihrer Lösung zu vergewissern (4 Jahre: 11,1 %; 5 Jahre: 7,8 %; 6 Jahre: 3,9 %). Die Häufigkeitsangaben beziehen sich allerdings lediglich auf die beobachtbaren Fälle doppelten Zählens. Eine Lösungsmethode, die bei den jüngsten Kindern auffällt, ist ihre Tendenz, zunächst alle Steine in den Behälter zu legen; dies beobachtet man vor allem bei den beiden größten Mengen. Nur ein Teil der jüngsten Kinder gibt sich damit zufrieden, und prüft daher anschließend die Größe der gelegten

Menge entweder durch Zählen oder durch Korrespondenz (19,4 % der 4-jährigen, 9,8 % der 5-jährigen und 3,9 % der 6-jährigen zeigen diese Lösungssequenz).

Von besonderem Interesse ist der Versuch der Kinder, die Lösung durch Korrespondenz zu kontrollieren. Am häufigsten prüfen die vierjährigen Kinder ihre Lösung durch Korrespondenz nach (4 Jahre: 8,3 %; 5 Jahre: 2 %; 6 Jahre: 2 %), wobei zusätzlich manche Kinder die Korrespondenzlösung nur bei einem Teil der Aufgaben, in der Regel für die Herstellung der größten Mengen, wählen (Korrespondenz bei einem Teil der Aufgaben: 4 Jahre: 8,3 %; 5 Jahre: 3,8 %; 6 Jahre: 0 %). Besonders auffällig ist der Anteil der 4-jährigen, die die Korrespondenz als zweite Lösungskategorie anwenden, nachdem sie zuvor alle Steine in die Schachtel gelegt haben (immerhin 14 % der Kinder wählen diesen Weg).

Bei den älteren Kindern finden sich gelegentlich Lösungen durch Zeigen, d.h. das Kind zeigt systematisch der Reihe nach paarweise je auf ein Element der ersten Vergleichsmenge und ein Element der zweiten Menge und prüft so systematisch die Äquivalenz. Diese Strategie ist allerdings relativ schwierig zu beobachten, da manche sechsjährigen Kinder diese Korrespondenzrelation mittels Augenbewegungen durchführen.

Um die Häufigkeit dieser Lösungsmethode zu prüfen, wurden an einer ausgewählten Gruppe eines Kindergartens ($N = 42$) besonders sorgfältige Beobachtungen zu dieser Lösungsstrategie gemacht. Der Untersucher war im Kodieren und Beobachten dieser Kategorie besonders geschult, um systematische Augenbewegungen bei den Kindern aufzeichnen zu können. In dieser Gruppe fanden sich immerhin 5 Kinder (12 %), die diese Art der Lösung zeigten. Alle Kinder waren älter als 65 Monate.

Faßt man alle Kategorien zusammen, die die Korrespondenz als Lösungsmethode enthalten, so erhält man bei den 4-jährigen 16,6 %, bei den 5-jährigen 11,8 % und bei den 6-jährigen 5,9 % die mindestens einmal, meist aber mehrmals die Korrespondenzrelation zur Kontrolle der Lösung einsetzten ($\chi^2 = 5,05$, $df = 2$, $p > 0.05$). Entgegen den Erwartungen, die man aus Piagets Verständnis der Korrespondenzrelation als abstraktem Konzept ableiten müßte, verwenden die jüngsten Kinder diese Strategie am häufigsten. Das wird besonders deutlich, wenn man alle Lösungsvorschläge des Kindes in der ersten und in der zweiten Kodierung zusammenfaßt. Dann verwenden 30,5 % der 4-jährigen in mindestens einer Teilaufgabe im

Lösungsablauf die Korrespondenz, bei den 5-jährigen 15,6 %, bei den 6-jährigen 11,6 % ($\chi^2 = 10,3$, $df = 2$, $p < 0.01$).

Auffallender noch sind die Antworten von Kindern, die bei den größten Mengen systematisch Zählfehler machen und dann die Korrespondenz einsetzen, um ihre fehlerhafte Lösung zu korrigieren. Zusätzlich wurden mehrere Kinder zwischen 4;0 und 4;5 beobachtet (insgesamt 4 Kinder), die die größte Menge (9) noch nicht zählen konnten (sie wußten nicht die Zählwörter bis neun) und daher systematisch auf die Lösung durch Korrespondenz zurückgriffen.

Daniel (4;2) zählt bei den vorgelegten Mengen immer nur bis fünf korrekt und nennt dann eine beliebige Folge von Zahlwörtern ("1, 2, 3, 4, 5, 7, 3, 4, 5, 7"), um die erste Teilmenge und die Vergleichsmenge zu zählen. Auf die Frage, ob die beiden Häufchen - die Reihe mit den blauen Steinen und der Haufen roter Steine in der Schale - gleich sind, verneint er, überlegt und legt dann systematisch zu jedem blauen Stein einen roten; anschließend kommen die roten Steine wieder in die Schale zurück: "Jetzt sind es gleichviele". Sonja (4;5) geht ganz ähnlich vor, obwohl sie wesentlich weiter zählen kann. Bei den Mengen 7 und 9 wird sie aber unsicher und sagt: "ich guck mal, ob es stimmt" und legt neben jeden blauen Stein einen roten: "sind gleichviele".

Die Instruktion führt das Kind präzise auf das Zählen der Mengen hin. Es zählt zunächst auf Aufforderung des Testleiters die erste Teilmenge; dann bittet er das Kind, in die Schale genausoviele rote Steine zu legen. Bei der Aufgabe "Nichtäquivalenz durch Zählen", die in einer früheren Testsitzung durchgeführt wurde, wurde eine Lösung des Kindes durch Korrespondenz sogar explizit ausgeschlossen, d.h. Ansätze zum Legen einer Korrespondenz wurden unterbrochen und das Kind gebeten, es solle es noch einmal mit Zählen versuchen.

Nichtäquivalenz durch Zählen

Bei dieser Aufgabe zählt das Kind zunächst auch vier Teilmengen und vergleicht dann ihre Größe. Es wird dabei jedesmal besonders aufgefordert, die Menge abzuzählen, bevor es einen Vergleich zur zweiten Menge vornimmt.

Beim Vergleich dieser Aufgabe mit der Aufgabe "Äquivalenz durch Zählen" ist der Anteil korrekt gezählter Teilmengen für die beiden

Aufgaben jeweils innerhalb der Altersgruppen gleich; der Anteil der Kinder, die 3 bzw. 4 Teilmengen korrekt zählen, sind bei Nichtäquivalenz durch Zählen 58,9 % (4 J.), 80,3 % (5 J.), 96 % (6 J.), bei Äquivalenz durch Zählen 69,5 % (4 J.), 86,2 % (5 J.) und 96 % (6 J.). Die etwas höhere Lösungsgenauigkeit der jüngeren Kinder bei Äquivalenz durch Zählen kommt vermutlich durch die Anordnung der Teilmengen in einer Linie zustande. Das Kind wird so durch die räumliche Anordnung (z.B. in einem Häufchen) nicht zu Fehlern beim Abzählen verleitet (z.B. durch doppeltes Antippen eines Steinchens).

Beim Vergleich der Teilmengen, bei denen die Kinder die Größenrelation der Mengen zueinander erkennen sollen, machen die 4-jährigen Kinder zum größten Teil mindestens einen Vergleich richtig (50 % beim Vergleich 5 mit 6 und 61 % beim Vergleich 6 mit 7), wobei die Überschneidung richtiger Lösungen nicht vollständig ist. Dagegen wird die Gesamtaufgabe nur von 36 % der jüngsten Kinder gelöst (im Vergleich zu 74,5 % (5 J.) und 92,2 % (6 J.), $\chi^2 = 24,3$, $df = 2$, $p < 0.001$); auch beim Vergleich der Teilmengen schneiden die älteren Kinder wesentlich besser ab (Vergleich 5 mit 6: 50 % (4 J.), 80,4 % (5 J.), 94,1 % (6 J.), $\chi^2 = 13,6$, $df = 2$, $p < 0.01$; Vergleich 6 mit 7 61,1 % (4 J.), 86,3 % (5 J.), 98 % (6 J.), $\chi^2 = 8,7$, $df = 2$, $p < 0.05$).

Eine Analyse der Ergebnisse in Drei-Monatsschritten vermittelt, ähnlich wie die andere Zählaufgabe, den Eindruck einer sich kontinuierlich verbessernden Fertigkeit der Kinder bei der Aufgabe mit zunehmendem Lebensalter. Die jüngsten Kinder (48 bis 50 Monate, 51 bis 53 Monate) machen zum größten Teil Fehler bei dieser Aufgabe, wozu auch die Transitivität der beiden Mengen gehört (s.u.). In den folgenden Altersgruppen von etwa 54 bis 65 Monaten ist der Anteil der Kinder, die die Aufgabe lösen bzw. systematische Fehler machen in etwa gleich groß. Die ältesten Kinder, ab etwa 66 Monaten (5;6) machen kaum noch Fehler bei der Nichtäquivalenzaufgabe (punktbiserielle Korrelation der Aufgabe mit Lebensmonaten, $p_{bis} = 0,466$, $t = 6,4$, $df = 136$, $p < 0.0001$).

Die Aufgaben zur Transitivität fügen sich in dieses Bild ein. Die

Vierjährigen lösen diese Aufgabenstellung nur zu einem kleinen Teil, wobei die Fehlversuche z.T. auch Abbrüche der Aufgabe mit einschlossen, die dann vorgenommen wurden, wenn das Kind bei Teilvergleichen verkehrte Größenbeziehungen gefunden hatte. Gegenüber 36 % der 4-jährigen fällt den 5- (74,5 %) und den 6-jährigen (88,2 %) das Vergleichen der äußeren Mengen in der Aufgabe relativ leichter ($\chi^2 = 22,0$, $df = 2$, $p < 0,01$). Das kann man z.T. daraus verstehen, daß die älteren Kinder die absoluten Zahlen der äußeren Mengen wesentlich häufiger erinnern können und ihnen deshalb die Angabe der Größenrelation nicht schwerfällt (19,4 % (4), 49 % (5), 54,9 % (6) der Kinder erinnern die absoluten Zahlen, $\chi^2 = 17,6$, $df = 2$, $p < 0,001$). Dagegen sind andere Erklärungskategorien des Kindes nur von untergeordneter Bedeutung.

Ungenaue Angaben der Mengen ("da sind mehr blaue") sind sehr selten; die Kinder sind sich wohl einer konkreten Repräsentation der beteiligten Mengen bewußt. Nur bei den ältesten Kindern finden sich auch Hinweise auf Längenreize; etwa 10 % der 6-jährigen versuchen, die Größenrelation zwischen den äußeren Mengen aus Längenreizen zu erschließen ("auf der einen Karte war die blaue Reihe länger"; "die da waren länger"), obwohl die Längenunterschiede zwischen den dargebotenen Mengen eher gering waren. Ein Hinweis auf die mittlere Vergleichsmenge findet sich im Rahmen der Untersuchung nicht, obwohl im Laufe der Voruntersuchung solche Antworten bei mehreren Kindern beobachtet wurden. Die Kinder verbinden mit den Kardinalzahlen der abgezählten Mengen bereits eine Ordnungsbeziehung (5, 6, 7), so daß sie nicht auf eine mittlere Vergleichsmenge zurückgreifen müssen, um zu erkennen, daß 7 größer als 5 ist.

Detailliertere Beobachtungen der Gruppe aus 42 Kindern zeigen eine Vielzahl von Variationen der Lösungsstrategie, die Vorschulkinder anwenden, um ihre Lösung zu kontrollieren. Einige Kinder (3) zählen die Menge z.B. parallel (durch gleichzeitiges Zeigen und Nennen der Zahlwörter), um die Größenbeziehung herauszufinden. Mehrere Kinder legen auch Korrespondenzen, obwohl sie vom Testleiter explizit zum Zählen aufgefordert werden. Gelegentlich werden Korrespondenzen erneut gewählt, um eine unsichere Antwort abzustützen. Z.B. sucht Astrid (4;10) zu zeigen, daß ein Stein übersteht, so daß die roten Steine mehr sein müßten. Bei Zählfehlern zählen einige Kinder erneut ab; allerdings verhalten

sich die jüngsten Kinder hier sehr inkonsistent. Fünf Kinder wurden beobachtet, die sich ihrer Antwort nicht mehr sicher waren ("ich glaub' die roten sind doch mehr"), die aber dann nur die eine Menge zählten (z.B. die roten) und daraus schlossen, daß diese Menge mehr bzw. weniger Steine enthalten müsse (alle Kinder waren zwischen 4;0 und 4;10). Monika (4;10) zeigt eine besonders seltsame Folge von Lösungsvorschlägen: beim zweiten Abzählen findet sie eine andere Lösung als beim ersten Mal. Deshalb sagt sie, "ich leg' sie mal nebeneinander", und legt neben jeden blauen Stein einen roten. Nun ist sie noch mehr verwirrt, weil sie die Länge der Reihe und der überstehende rote Stein irritiert. Deshalb zählt sie die Mengen erneut, trennt aber nicht die roten und die blauen Steine, sondern zählt einfach der Reihe nach, so wie die Steine aufeinanderfolgen. "Jetzt sind es vierzehn". "Sind es mehr rote oder mehr blaue?" - "Gleichviele". Sie schließt also aus der gesamten Menge, daß die Teilmengen gleich sind, ohne die Mengen näher differenziert zu haben.

Die Lösung der Gesamtaufgabe - d.h. die korrekte Herstellung der Teilaufgaben einschließlich des korrekten Abzählens der Vergleichsmengen und die Beantwortung der Frage nach der Transitivität der äußeren Mengen 5 und 7 - zeigt eine deutliche Veränderung im Übergang zwischen 4 und 5 Jahren. Nur 25 % der vierjährigen Kinder lösen alle Aspekte der Aufgabe vollständig gegenüber 70,6 % der 5-jährigen und 84,3 % der 6-jährigen ($\chi^2 = 32,3$, $df = 2$, $p < 0.001$). Bei den jüngsten Kindern finden sich Fehler in allen Teilen der Aufgabe: ein Drittel der Vierjährigen machen Zählfehler beim Abzählen einer Teilmenge; manche Kinder geben ein unangemessenes Größenurteil, obwohl sie zuvor die Teilmenge korrekt gezählt haben.

Zum Beispiel zählt Sonja (4;2) die erste Menge mit 4 und die zweite mit 5 ab (die richtigen Angaben sind 5 und 6), was beides nicht richtig ist, obwohl die Größenrelation erhalten bleibt. Auf die Frage, ob es gleichviele oder mehr blaue oder mehr rote sind, antwortet sie ganz bestimmt "gleichviele" und hat offensichtlich die Kardinalzahlen der abgezählten Mengen vergessen.

Schließlich behält nur ein kleiner Teil der jüngsten Vorschüler die absoluten Zahlen der Mengen, um die Transitivitätsfrage genau beantworten zu können. Immerhin erinnern 19,5 % der 4-jährigen die absoluten Zahlen 5 und 7 (bei insgesamt 36 % der Kinder, die die Größenrelation zwischen den äußeren Mengen korrekt beantworten).

Bildet man jedoch Untergruppen von jeweils drei Monaten für alle untersuchten Kinder, so zeigen sich ab 5 1/2 Jahren nur noch

wenige Kinder, die bei dieser Aufgabe Fehler machen.

Äquivalenz durch Korrespondenz

Die Untersuchung dieser Aufgabe ist von besonderem Interesse, weil die Kinder hier die Korrespondenzrelation aktiv anwenden müssen, um irreführende Längenreize zu überwinden. In allen drei Altersgruppen beobachtet man einen relativ hohen Anteil von Kindern, die Fehler machen. Mindestens einen oder aber mehrere Fehler machen bei den 4-jährigen 77,8 %, bei Kindern mit 5 Jahren 72,6 % und mit 6 Jahren 60,8 % (drei richtige Lösungen bei 22,2 % (4), 27,5 % (5), 39,2 % (6), $\chi^2 = 5,12$, $df = 2$, $p > 0,05$). (1) Für die einzelnen Unteraufgaben findet sich nur für die Aufgabe mit 5 Steinen ein signifikanter Unterschied in der Häufigkeit zwischen den Altersgruppen (vgl. Tabelle 1). Offensichtlich sind Kinder mit 4 Jahren schon mit der Korrespondenzrelation vertraut, aber ähnlich wie bei den älteren Kindern führen Schwierigkeiten in der Aufgabenstellung (vor allem die irreführenden räumlichen Reize) zu Fehlern bei der Lösung.

Tabelle 1 Äquivalenz durch Korrespondenz
Häufigkeit der richtig hergestellten
Mengen (aufgeschlüsselt nach dem Alter)

Alter	4	5	6	
Menge				
3	63,9	78,4	78,4	$\chi^2 = 1,92$, $df = 2$, $p > 0,1$
5	41,7	41,2	64,7	$\chi^2 = 7,38$, $df = 2$, $p < 0,05$
7	47,2	43,1	47,1	$\chi^2 = 0,23$, $df = 2$, $p > 0,1$

(Angaben in Prozent)

(1) Dies ist eine der wenigen Variablen, in denen Geschlechtsunterschiede beobachtet wurden, aber nur in der Altersgruppe der 6-jährigen ($t = 2,148$, $df = 42$, $p < 0,05$) zugunsten der Mädchen.

Vergleicht man die Antworten eines Kindes untereinander, so sind die Unterschiede zwischen der kleinsten Menge und den beiden größeren Mengen (5 und 7) jeweils signifikant (Vorzeichentest, $p < 0.0001$), für die beiden größeren Mengen beobachtet man jedoch keinen Unterschied (Vorzeichentest, $p > 0.1$). Bei der Analyse der Altersgruppen sind die Vergleiche für die 4-jährigen zwischen allen drei Mengen nicht signifikant ($p > 0.05$, zweiseitig, McNemar). Für die 5-jährigen sind jeweils nur die Vergleiche zwischen der kleinsten Menge und den beiden großen Mengen signifikant ($p < 0.001$, zweiseitig, McNemar), bei den 6-jährigen zusätzlich zu diesen Vergleichen ($p < 0.05$) auch der Vergleich zwischen den Mengen 5 und 7 ($p < 0.05$, zweiseitig, McNemar).

Diese Ergebnisse zeigen, daß in den beiden Altersgruppen 5 und 6 die Aufgabe mit den drei Steinen den Kindern wesentlich leichter fällt; die jüngsten Kinder machen auch bei der kleinsten Menge systematische Fehler, z.B. füllen über 20 % die ganze Karte mit Steinen, ohne auf die genauen Mengenbeziehungen zu achten. Offensichtlich korrigieren die älteren Kinder fehlerhafte Strategien bei der kleinsten Menge, da sie ihre Kardinalzahl direkt wahrnehmen oder abzählen können. Bei den beiden größeren Mengen sind die Fehlerstrategien aber etwa gleich häufig.

Welche Besonderheiten findet man in den Lösungen des Kindes? Eine auffällige Lösung ist, daß das Kind die ganze Unterlage mit Steinen füllt, weil es offensichtlich die Instruktion, eine Korrespondenzrelation herzustellen, nicht richtig verstanden hat (bei der Karte mit 5 Steinen legt das Kind dann mindestens 3 weiße Steine mehr auf die Karte als rote aufgeklebt sind). Die Häufigkeiten dieser Lösung für die drei Altersgruppen sind 8,1 % (4 J.), 10,5 % (5 J.) und 7,2 % (6 J.). Kinder, die diese Strategie wählen, gehen entweder von einem unbestimmten Vergleich der Mengen aus (die Vergleichsmengen sind nicht numerisch gekennzeichnet) oder aber sie achten auf ihren räumlichen Eindruck und denken, man könne die Menge gleichmachen, indem man die ganze Karte füllt. (Natürlich läßt sich diese Strategie vermeiden, wenn man die Umrandung begrenzt; aber der Einfluß solcher "topologischer"

Aspekte der Reizanordnung ist für die Arbeit Piagets auch besonders wichtig, Inhelder et al, 1975).

Relativ häufig in allen Altersgruppen finden sich Kinder, die nur die Zwischenräume füllen. Dann bleiben an beiden Rändern rote Steine stehen, so daß ein roter Stein mehr auf der Karte liegt. Das Kind achtet bei dieser unvollständigen Antwort entweder nur auf die Endelemente oder aber es beobachtet zwar, daß neben jedem roten Stein ein weißer liegt, ohne aber die Systematik der Korrespondenzrelation in beiden Richtungen zu prüfen. Mit dieser Anordnung besteht nämlich an einer Stelle eine Eins-Zu-Viele-Relation: ein weißer Stein ist zwei roten zugeordnet. 18,3 % der 4-jährigen, 16,3 % der 5-jährigen und 7,8 % der 6-jährigen füllen nur die Zwischenräume ($\chi^2 = 4,36$, $df = 2$, $p > 0.05$). Eine Lösung, die dazu direkt in Beziehung stehen dürfte: das Kind fügt weiße Steine auf beiden Seiten an, so daß in diesem Fall ein weißer Stein zuviel da ist. Offensichtlich achtet das Kind bei dieser unvollständigen Anordnung auf die weißen Endelemente und versucht die Reihen gleichlang zu machen. Die beobachteten Häufigkeiten für die drei Teillösungen sind: 14,7 % (4), 15,0 % (5) und 16,3 % (6) ($\chi^2 = 0,1$, $df = 2$, $p > 0.5$).

Diese drei qualitativen Strategien verdeutlichen, welche Schwierigkeiten das Kind mit der Aufgabe hat. Offenbar sind die räumlichen Reizaspekte - insbesondere die Länge - für das Kind bei der kolinearen Anordnung von Spielsteinen besonders schwer einzuordnen. Das Kind achtet dennoch auf die Korrespondenzrelation, denn nur selten werden Steine in der Mitte der Anordnung ausgelassen. Nur bei den vierjährigen Kindern findet man diese Fehlerart in deutlicher Ausprägung (8 % der Kinder), aber in der Regel kommt solch ein Fehler nur bei einer der Teillösungen vor. Im Vergleich zu den anderen systematischen qualitativen Lösungsstrategien fällt er nicht ins Gewicht. Gleichzeitig beobachtet man nur bei einzelnen Kindern (jeweils drei oder vier Kinder in jeder Altersgruppe), eine systematische Anwendung der Eins-Zu-Eins-Korrespondenz, indem sie zu jedem roten Stein einen weißen zuordnen und auf die exakte Paarbildung achten. Allerdings ist das Bilden der Korrespondenzrelation nur schwer zu beobachten, da sie das Kind auch durch

systematische Augenbewegungen ausführen kann. Auch bei der ausgewählten Gruppe von 42 Kindern findet sich keine Häufung der Paarbildung oder Korrespondenzbildung. Für die Beobachtung solcher Wahrnehmungsstrategien müßte man die Augenbewegungen eines Kindes durch Filmtechniken aufzeichnen (Boersma und Wilton, 1976).

Ältere Kinder greifen gern auf das Zählen als Kontrollstrategie zurück, um sich der Richtigkeit ihrer Lösung zu vergewissern. Gemittelt über die drei Teillösungen kontrollieren 3,4 % der 4-jährigen, 8,5 % der 5-jährigen und 12,4 % der 6-jährigen ihre Lösung durch Zählen nach ($\chi^2 = 5,1$, $df = 2$, $p > 0.05$). Bei dieser Aufgabe wurde übrigens das Zählen als Lösungsstrategie nicht ausgeschlossen, wie bei "Nichtäquivalenz durch Korrespondenz", obwohl das Kind deutlich aufgefordert wurde, zu jedem weißen Stein einen roten zu legen, damit es gleichviele werden. Vierjährigen Kindern fällt die Anwendung des Zählens in dieser Aufgabe wohl deshalb schwer, weil die Vergleichsmengen nicht deutlich räumlich getrennt sind.

Als weitere Teilaufgabe enthielt die Aufgabe "Äquivalenz durch Korrespondenz" das Wegnehmen der beweglichen Endelemente, so daß an beiden Seiten rote Steine übrig bleiben. Diese Veränderung erlaubt es einerseits zu beobachten, wie das Kind auf das Wegnehmen eines (oder zweier) Elemente reagiert - eine Subtraktion -, andererseits müßte sich zeigen, inwieweit die beiden Endelemente in der Reihe das Kind irreführen. Die Häufigkeiten korrekter Antworten zeigt noch einen relativ großen Teil von Kindern, die durch diese Anordnung irritiert werden (korrekte Antwort 44,9 % (4 J.), 54,9 % (5 J.) und 78,4 % (6 J.); $\chi^2 = 10,22$, $df = 2$, $p < 0.01$). Analysiert man die Erklärungen des Kindes für sein kognitives Urteil, so finden sich Hinweise auf die Endelemente relativ selten (jeweils nur etwa 5 % der Vier- bis Sechsjährigen). Dagegen betont ein großer Teil der Kinder die Verringerung um eins, d.h. die Subtraktion eines Elements (22,2 % bei den 4-jährigen, 27,5 % bei den 5-jährigen, 29,4 % bei den 6-jährigen, $\chi^2 = 1,1$, $df = 2$, $p > 0.05$).

Nur einzelne Kinder zählen zur Kontrolle ihre Antwort. Jeweils ein Viertel der Kinder beachtet die Subtraktion eines Elements, ist sich der Mengenänderung also bewußt. Diese Antwort führt dann zu richtigen Lösungen, wenn das Kind zuvor die Gleichheit der Mengen festgestellt hat. Die Aufmerksamkeit, die die Kinder

der praktischen Operation des Wegnehmens widmen, paßt zu den Ergebnissen von Brush (1978) zum Verständnis von Addition und Subtraktion bei Vorschulkindern.

Wieviele der Kinder stellen nun die korrekte Korrespondenzrelation her und somit die richtige Vergleichsmenge und werden zugleich durch das Wegnehmen der Endelemente nicht in ihrem quantitativen Urteil unsicher?

Der Anteil der Kinder, die beide Aspekte der Aufgabe lösen, ist im Vergleich zu den anderen Korrespondenzaufgaben relativ gering: nur 13,9 % der 4-jährigen Kinder, 21,6 % der 5-jährigen und schließlich 43,2 % der 6-jährigen schließen die Aufgabe vollständig und erfolgreich ab ($\chi^2 = 17,6$, $df = 2$, $p < 0.001$).

Beim Herstellen einer Vergleichsmenge durch Korrespondenz hat das Kind dann besondere Schwierigkeiten, wenn es zur Überwindung irreführender räumlicher Reize die paarweise Zuordnung sehr systematisch durchführen muß. Anders als bei der Korrespondenzaufgabe, die z.B. den Ausgangspunkt für die Zahlinvarianzaufgabe Piagets bildet, helfen dem Kind räumliche Reize hier nicht, die Gleichheit der Mengen abzuschätzen. Obwohl die Aufgabe "Äquivalenz durch Korrespondenz" nicht eindeutig ein logisches Konzept der Korrespondenz einschließt, da das Kind nicht eindeutig zwischen Eins-Zu-Eins-Korrespondenz und Eins-Zu-Viele-Korrespondenz unterscheiden muß, erfordert die erfolgreiche Lösung der Aufgabe dennoch eine systematische Anwendung der Eins-Zu-Eins-Relation für den Vergleich zweier Mengen (vgl. Russac, 1978).

Nichtäquivalenz durch Korrespondenz

Bei der Aufgabe "Nichtäquivalenz durch Korrespondenz" soll das Kind zunächst einen systematischen Vergleich zweier Paare von Mengen durch die Korrespondenzbeziehungen zwischen den einzelnen Elementen vornehmen und anschließend die Größenbeziehung zwischen den beiden Mengen erschließen, die nicht unmittelbar verglichen wurden (Transitivität der Mengen).

Zwischen dem ersten und dem zweiten Vergleich finden sich für die drei Altersgruppen ähnliche Werte. Die Vergleiche der Mengen

5 und 6 und 6 mit 7 durch Korrespondenz, beantworten jeweils 77,8 % (4 J.), 88,3 % (5 J.) und 98,0 % (6 J.) der Kinder korrekt, während bei den Vergleichen der Mengen 7, 8, 9 jeweils 77,8 % (4 J.), 86,3 % (5 J.) und 98,0 % (6 J.) der Kinder korrekte Vergleiche vornehmen. Dieser Teil der Aufgabe macht selbst den jüngsten Kindern nicht allzu große Schwierigkeiten. Eine Analyse der Veränderungen mit dem Alter in 3-Monatsschritten zeigt, daß die jüngsten Kinder die Vergleiche systematisch und richtig beantworten, und sich der Anteil der fehlerhaften Vergleiche mit zunehmendem Alter deutlich verringert. Ab 5;5 Jahren beobachtet man nur noch vereinzelt Fehler beim Vergleichen der Teilmengen.

Der problemlose Umgang der Kinder mit dieser Aufgabe wird auch an den Erklärungen der Kinder illustriert. Ein großer Teil der Kinder weist explizit auf die Korrespondenzbeziehung hin. Für die erste Teilaufgabe geben 44,4 % (4 J.), 62,8 % (5 J.) und 60,8 % (6 J.) der Kinder einen solchen Hinweis ($\chi^2 = 3,57$, $df = 2$, $p > 0.05$). Das bedeutet, sie ordnen dem überstehenden Element einen Stein zu: "zu diesem fehlt eines; dieser hat keines" und leiten daraus korrekt die Asymmetrie der Mengen ab.

Für den zweiten Durchgang finden sich ähnlich 36 % (4 J.), 45 % (5 J.) und 51 % (6 J.) der Antworten, die einen Hinweis auf die Korrespondenzbeziehung enthalten ($\chi^2 = 2,55$, $df = 2$, $p > 0.05$). Dagegen zählt nur ein kleiner Teil der Kinder bei dieser Aufgabe, um sich des Urteils zu vergewissern (jeweils 7,8 % der 5- und 6-jährigen). Das Zählen wurde nicht als zulässige Antwort gewertet und Kinder, die ihre Lösung durch Zählen fanden, wurden noch einmal aufgefordert, die Aufgabe mit Hilfe der Eins-Zu-Eins-Korrespondenz zu lösen. Einige Kinder machen auch unbestimmte Mengenangaben (z.B. "die roten Steine sind mehr"), offensichtlich aufgrund der Wahrnehmung der Längenbeziehungen zwischen den angeordneten Reihe. Solche unbestimmten Mengenangaben finden sich im ersten Durchgang zu 11,8 % (4 J.), 13,7 % (5 J.) und 11,8 % (6 J.), im zweiten Durchgang zu 8,3 % (4 J.), 11,8 % (5 J.) und 15,7 % (6 J.). Manche Kinder wählen auch relativ originelle

Lösungen, die kurz erwähnt werden: Fünf Kinder legen stets die Steine nebeneinander (z.B. Monika: "das ist die Braut, der rote Stein, und das ist der Bräutigam"), sie geraten dabei aber leicht in Schwierigkeiten, weil sie dann die Länge der Reihe verwirrt. Beim Zählen sind mehrere Vierjährige zu beobachten, die beim Vergleich wieder nur eine Menge abzählen und daraus auf die Gleichheit der Gesamtmenge schließen (vgl. Saxe, 1977, präquantitatives Zählen).

Bei der Frage nach der Transitivitätsbeziehung zwischen den äußeren Mengen beantworten 41,7 % der 4-jährigen, 58,8 % der 5-jährigen und 68,6 % der 6-jährigen beide Transitivitätsfragen angemessen ($\chi^2 = 6,61$, $df = 2$, $p < 0.05$). Bei der Auswertung der Erklärungen des Kindes für sein kognitives Urteil sind intuitive bzw. allgemeine Erklärungen des Kindes zwar am häufigsten (z.B. "ich hab's gewußt", "ich hab's gesehen", "weil ich's weiß"), im ersten Durchgang immerhin bei 47,2 % (4 J.), 37,3 % (5 J.) und 50,9 % (6 J.) ($\chi^2 = 4,74$, $df = 2$, $p > 0.05$). Aber anders als bei der Aufgabe 'Nichtäquivalenz durch Zählen' findet man zunehmend auch Kinder die Hinweise auf die mittlere Vergleichsmenge geben (im ersten Durchgang 5,6 % (4 J.), 11,8 % (5 J.) und 15,7 % (6 J.) ($\chi^2 = 4,735$, $df = 2$, $p > 0.05$); im zweiten Durchgang 8,3 % (4 J.), 13,7 % (5 J.) und 9,8 % (6 J.) ($\chi^2 = 1,47$, $df = 2$, $p > 0.05$)). Die Kinder erschließen also die Größenbeziehung zwischen den Mengen, die sie nicht explizit verglichen haben, aus der Größenbeziehung dieser Mengen zur mittleren Vergleichsmenge. Daneben gibt es relativ viele Kinder, die die Größenbeziehung zwischen den Mengen aus der räumlichen Anordnung, der Länge der Reihen bzw. der Länge der Karten abzuleiten suchen (1. Durchgang: 19,4 % (4 J.), 15,7 % (5 J.), 11,8 % (6 J.), $\chi^2 = 1,46$, $df = 2$, $p > 0.05$); 2. Durchgang 11,1 % (4 J.), 15,7 % (5 J.), 15,7 % (6 J.), $\chi^2 = 0,99$, $df = 2$, $p > 0.05$). Ungenaue Mengenangaben, in denen das Kind die Größenrelation einfach benennt ("die Blauen sind halt hier mehr", "das da sind mehr") finden sich auch relativ oft (1. Durchgang 5,6 % (4 J.), 19,6 % (5 J.), 5,5 % (6 J.); 2. Durchgang 13,8 % (4 J.), 11,8 % (5 J.), 19,6 % (6 J.)).

Die größere Häufung dieser Art von Antwort im zweiten Durchgang erklärt sich zum Teil dadurch, daß manche Kinder bei der Bitte um erneute Begründung mit Ungeduld reagieren und nicht noch einmal das Prinzip benennen wollen, das sie zuvor schon genannt haben. Dann begründen sie ihre Antwort nur mit einer ungenauen Mengenangabe.

Räumliche Korrespondenz

Bei der Herstellung der räumlichen Korrespondenz sollen die Kinder aus dem paarweisen Zusammenstehen von Gegenständen bzw. dem Fehlen einzelner Elemente auf die Größe der Vergleichsmenge schließen.

Eine Zunahme des Anteils korrekter Lösungen beobachtet man vor allem im Übergang zwischen 4 und 5 Jahren, während die Kinder in der Gruppe der 6-jährigen diese Aufgabenstellung fast völlig bewältigen. Auch vierjährigen Kindern fällt im Grunde die Einschätzung der Größe einer Menge mittels der Korrespondenz noch relativ leicht.

Darüber geben auch die paarweisen Vergleiche der Lösungen des Kindes Aufschluß. Für die gesamte Gruppe der Kinder sind die Unterschiede zwischen der ersten Teilaufgabe (Menge mit drei paarweisen Zuordnungen) und den zweiten und dritten Teilaufgaben (5 bzw. 7 Paare mit einem überstehenden Element) signifikant (Vorzeichentest, $z = 4,62$, zweiseitig, $p < 0.0001$; $z = 4,97$, zweiseitig, $p < 0.0001$), während die beiden letzten Teilaufgaben (5 und 7) dem Kind in etwa gleich schwer fallen ($z = 0,77$, zweiseitig, $p > 0.1$). Diese Ergebnisse wiederholen sich völlig gleichsinnig, wenn man paarweise Vergleiche innerhalb der drei Altersgruppen vornimmt. Allerdings fallen die Ergebnisse bei den vierjährigen Kindern nicht so deutlich aus (Vergleich 3 mit 5, Vorzeichentest, zweiseitig (binominal), $p < 0.05$; Vergleich 3 mit 7, zweiseitig (binominal), $p < 0.005$; Vergleich 5 mit 7, zweiseitig (binominal), $p > 0.5$). Die Darstellung der anderen Altersgruppen wird hier übergangen, weil die Ergebnisse mit denen der Gesamtgruppe identisch sind. Die kleinere Menge fällt allen

Kindern leichter, da sie mehrere quantitative Strategien zugleich einsetzen können, um die Größenbeziehung der vorgelegten Mengen abzuschätzen. Mengen von jeweils drei Steinen dürften einige Kinder aus der direkten Wahrnehmung vergleichen können, andere durch Zählen. Auch ist die Kontrolle der Korrespondenzrelation bei so einer kleinen Anordnung wesentlich überschaubarer. Bei den beiden größeren Mengen sind es offensichtlich ähnliche Schwierigkeiten, die das Kind zu Fehlern führen, Schwierigkeiten, die sicherlich mit der Übersetzung der erkannten Korrespondenzbeziehung in eine quantitative Beziehung zwischen Mengen zusammenhängen.

Aus der Summe der korrekten Lösungen sieht man, daß Kinder mit 4 Jahren zu 41,7 % alle Teillösungen richtig beantworten, bei den 5-jährigen 60,8 %, bei den 6-jährigen 86,3 % ($\chi^2 = 15,9$, $df = 2$, $p < 0.001$). Eine Analyse der Lösungshäufigkeiten innerhalb von Untergruppen von Kindern, die immer aus drei Lebensmonaten bestehen, zeigt eine auffällige Veränderung der Lösungshäufigkeiten in dem Abschnitt zwischen 5;2 und 5;8. Bis zu diesem Altersabschnitt bleiben die Häufigkeiten richtiger und falscher Antworten in etwa gleich; ab dem gekennzeichneten Entwicklungsalter löst der größte Teil der Kinder die gesamte Aufgabe mit allen Teillösungen (punktbiseriale Korrelation für die dichotome Kodierung der Aufgaben mit Lebensmonaten: $r_{bis} = 0,44$, $t = 5,7$, $df = 136$, $p < 0.0001$).

Bei den Erklärungen der Teilaufgaben werden vor allem die jüngeren Kinder auf ein fehlendes Element oder ein überzähliges Element aufmerksam. Einmal sagt das Kind "ein Mann hat keine Frau", das andere mal "der Mann ist alleine", "der Mann ist zuviel". Seltsamerweise finden sich bei den 4- und 5-jährigen fast ausschließlich Hinweise auf ein fehlendes Element (Häufigkeiten für die Altersgruppen: 15,7 % (4 J.), 20,9 % (5 J.) und 2 % (6 J.); $\chi^2 = 14,8$, $df = 2$, $p < 0.001$), während die 6-jährigen Kinder überaus häufig auf das überzählige Element achten (25,5 % bei den 6-jährigen gegenüber nur 4 bzw 3 % bei 5- und 4-jährigen, $\chi^2 = 30,5$, $df = 2$, $p < 0.001$). Wodurch diese Verschiebung zustande

kommt, wird aus den Antworten der Kinder nicht deutlich (Die Resultate können nicht auf Kodierfehler zurückgehen, da die Protokolle in beliebiger Reihenfolge - unabhängig vom Alter - kodiert wurden). Eine mögliche Deutung ist, daß jüngere Kinder sich weitgehend auf das einzelnstehende Element konzentrieren, dem ein zugeordnetes Element fehlt ("der Mann hat keine Frau"). Dagegen könnten die älteren Kinder sich auf den Vergleich der Gesamtmengen konzentrieren; so fällt ihnen das überzählige Element ins Auge ("ein Mann ist zuviel da"). Obwohl diese Erklärung plausibel ist, kann sie nur begrenzt verdeutlichen, weshalb eine so auffällige Veränderung zwischen den Altersgruppen stattfindet.

Obwohl nur ein kleiner Teil der Kinder ihre Lösung durch Zählen kontrolliert, ist Zählen eher bei den älteren Kindern zu beobachten (3,7 % (4 J.), 6,5 % (5 J.), 7,2 % (6 J.), $\chi^2 = 1,2$, $df = 2$, $p > 0.1$). Diese Tendenz ähnelt den Antworten der Kinder bei anderen Korrespondenzaufgaben.

Der Vergleich der Mengen durch Korrespondenz stellt für das Kind auch ein sprachliches Kodierungsproblem dar. So beobachtet man nicht wenige Kinder, die bei der Lösung die Größenrelation zwischen den Mengen verkehren. Sie schließen nämlich, weil eine Frau alleine steht, müsse es mehr Männer auf der Karte geben. Diesen qualitativen Fehler beobachtet man in allen Altersgruppen (bezogen auf alle Teilaufgaben ist dieser Antwortfehler bei 5,6 % der 4-jährigen, 4,6 % der 5-jährigen und 5,2 % der 6-jährigen zu finden ($\chi^2 = 0,21$, $df = 2$, $p > 0.1$). Betrachtet man nur einzelne Teilaufgaben, beobachtet man diese Antwortkategorie noch wesentlich häufiger, mindestens 16,7 % der 6-jährigen, 13,7 % der 5-jährigen und 15,7 % der 4-jährigen begehen diesen Übersetzungsfehler mindestens einmal. Möglicherweise versteht sich dieses Verhalten am besten so: die Kinder achten nur auf das einzelne Element und seine Beziehung zu den beiden Vergleichsmengen wird nicht präzise zugeordnet. In erster Linie die ältesten Kinder (6 J.) weisen auf die paarweise Korrespondenz zwischen den Figuren hin und zwar fast ausschließlich bei der Menge, die drei Paare von Figuren enthält (11 % der 6-jährigen geben diesen

Hinweis bei der Menge mit drei Paaren).

Bewertet man die Aufgabe als Ganzes, so lösen alle drei Teilaufgaben jeweils 41,7 % der 4-jährigen, 60,8 % der 5-jährigen und 86,3 % der 6-jährigen (s.o.). Bezieht man mit ein, ob das Kind mindestens einmal eine korrekte Erklärung gibt, indem es auf die Korrespondenzrelation bzw. das überstehende Element hinweist, verringern sich diese Häufigkeiten nur unerheblich (um maximal 3 %). Löst das Kind die Aufgabe vollständig, gibt es mit Sicherheit auch einen Hinweis auf die Bedeutung der Korrespondenz in der Anordnung der Figuren.

1.2. Entwicklungsbeziehung zwischen Zähl- und Korrespondenzaufgaben

Bei der Untersuchung von Entwicklungsbeziehungen zwischen Zähl- und Korrespondenzaufgaben sind mehrere Vergleiche von Interesse. Einerseits läßt sich die relative Schwierigkeit von Aufgaben in den verschiedenen Altersgruppen vergleichen. Weiter ist die Analyse der Entwicklungsbeziehungen zwischen verschiedenen Zähl- und Korrespondenzaufgaben anhand der Häufigkeitsverteilung in der Kontingenztafel, die aus den verschiedenen Niveaus zweier Aufgaben aufgebaut ist, von Interesse. Für diesen Zweck werden Entwicklungsvorhersagen (in der Regel die Priorität einer Aufgabe gegenüber der anderen in der Entwicklung) mithilfe der Vorhersageanalyse auf ihre Gültigkeit für die vorliegenden Daten überprüft. Schließlich ist von Bedeutung, qualitative Ähnlichkeiten in der Lösung des Kindes herauszuarbeiten, die Parallelen zwischen Zählaufgaben und Korrespondenzaufgaben aufzeigen lassen.

Bei den Aufgaben zum Mengenvergleich durch Zählen wurde das Vergleichen ungleicher Mengen und das Herstellen von gleichen Mengen beobachtet. Damit unterschieden sich die Aufgaben in zwei Hinsichten: einmal in der Äquivalenz bzw. Nichtäquivalenz der Mengen und in dem Grad an Aktivität des Kindes bei der Herstellung der Mengen. Vergleicht man die Häufigkeiten der Gesamtaufgabe mit dem angenommenen Modell einer Priorität der Aufgabe "Nichtäquivalenz

durch Zählen" gegenüber der "Äquivalenz"aufgabe, ergibt sich eine relativ gute Bestätigung des Modells (die schraffierten Zellen enthalten nicht erwartete Kombinationen von Aufgaben) (vgl. Tabelle 2).

Tabelle 2

Lösungsrelation der beiden Mengenvergleiche durch Zählen

Nichtäquivalenz durch Zählen

		0	1	
Äquivalenz durch Zählen	0	34	27	
	1	16	61	$V_p = 0,426$ $U = 0,2$ $z = 4,08$ $p < 0.0001$

N = 138

Tabelle 3

Lösungsrelation der beiden Mengenvergleiche durch Zählen (Teilmengenvergleich)

Nichtäquivalenz durch Zählen (Vergleich der Teilmengen)

		0	1	
Äquivalenz durch Zählen (korrektes Herstellen der Vergleichsmengen)	0	27	34	
	1	13	64	$V_p = 0,418$ $U = 0,17$ $z = 3,58$ $p < 0.001$

N = 138

Das Vergleichen verschieden großer Mengen, die bereits vorgegeben sind, fällt dem Kind also relativ leichter, als das eigene Herstellen gleichgroßer Mengen. Dabei ist in der Aufgabe "Nichtäquivalenz durch Zählen" die Frage nach der Transitivität der Mengen mit enthalten. Analysiert man die Beziehung zwischen den beiden Aufgaben nur im Hinblick auf das richtige Vergleichen bzw. Zusammenstellen der Mengen, wird die größere Schwierigkeit der Äquivalenzaufgabe für das Kind noch deutlicher (vgl. Tabelle 3).

Bei den Korrespondenzaufgaben wird ebenfalls zwischen äquivalenten und nichtäquivalenten Mengen unterschieden. Wie bei den Zählaufgaben wird hier erwartet, daß die Aufgabe "Nichtäquivalenz durch Korrespondenz" leichter ist. Die Gründe dafür liegen einerseits in der größeren räumlichen Unterstützung der Korrespondenzrelation bei der Aufgabe "Nichtäquivalenz durch Korrespondenz" (vor allem dann, wenn die Steine untereinander liegen), zum anderen unterstützen Längenreize die Korrespondenzbeziehung (ein überstehender Stein ohne zugeordneten Partner zeigt auch eine größere Länge an), während bei "Äquivalenz durch Korrespondenz" die Länge und die Korrespondenzbeziehung sich gegenseitig stören. Untersucht man die Prioritätsbeziehung zwischen den beiden Aufgaben, so zeigt sich bei der Vorhersageanalyse eine Unterstützung der Vorhersage (Tabelle 4).

Tabelle 4

Beziehungen zwischen den beiden
Mengenvergleichen durch Korrespondenz

Äquivalenz durch Korrespondenz
(Gesamtaufgabe)

		0	1		
Nichtäquivalenz durch Korrespondenz (Gesamtaufgabe)	0	46	11	$V_p = 0,30$ $U = 0,12$ $z = 1,9$ $p < 0.05$	
	1	54	27		
				$N = 138$	

Die Prüfung dieser Vorhersage wird allerdings dadurch erschwert, daß nur 28 % aller Kinder die Aufgabe "Äquivalenz durch Korrespondenz" völlig eindeutig lösen. Dadurch ist die Entwicklungsbeziehung an der Kontingenztafel nicht so eindeutig ablesbar. Innerhalb der drei Altersgruppen fällt die Äquivalenzaufgabe auch allen Kindern schwerer als die Nichtäquivalenzaufgabe.

Tabelle 5 Altersverteilung der beiden Korrespondenzaufgaben

<u>Alter</u>	Äquivalenz durch Korrespondenz	Nichtäquivalenz durch Korrespondenz
4	13,9	38,9
5	21,6	58,8
6	43,2	72,6

(Angaben in Prozent)

Die Aufgabe zur "räumlichen Korrespondenz" weist ähnliche Charakteristika wie "Nichtäquivalenz durch Korrespondenz" auf: die Korrespondenzrelation wird durch räumliche Reize unterstützt. Daher wird erwartet, daß das Kind diese Aufgabe ebenfalls vor der Äquivalenzaufgabe meistert. Diese Vorhersage wird bei der Analyse der Wechselbeziehungen zwischen den Aufgaben bestätigt. Das gilt sowohl dann, wenn bei der räumlichen Korrespondenz nur die korrekten Urteile herangezogen werden, als auch dann, wenn zusätzlich eine richtige Erklärung des Kindes erwartet wird (vgl. Tabelle 6).

Tabelle 6

Zum Verhältnis zweier Korrespondenzaufgaben
(in Abhängigkeit von Aufgabenkriterien)

Räumliche Korrespondenz
(mit korrekter Erklärung)

		0	1	
	0	43	57	$V_p = 0,43$
				$U = 0,102$
				$z = 2,66$
				$p < 0.005$
	1	8	30	
Äquivalenz durch Korrespondenz (Gesamtaufgabe)				$N = 138$

Räumliche Korrespondenz
(ohne Miteinbeziehung der Erklärung)

		0	1	
	0	42	58	$V_p = 0,546$
				$U = 0,056$
				$z = 3,48$
				$p < 0.001$
	1	6	32	
Äquivalenz durch Korrespondenz (Gesamtaufgabe)				$N = 138$

Die formelle Ähnlichkeit zwischen der räumlichen Korrespondenzaufgabe und der Aufgabe "Nichtäquivalenz durch Korrespondenz" wird auch an den häufigen Hinweisen der Kinder auf die Korrespondenzbeziehung sichtbar, wobei die Zunahme mit dem Alter fast parallel verläuft (Tabelle 7). Bei der Äquivalenzaufgabe spielt das Kind dagegen relativ selten auf die Wichtigkeit der Korrespondenzrelation an, die es zu legen versucht.

Tabelle 7

Hinweise des Kindes auf die Korrespondenz-
beziehung (Korrespondenzbildung, überstehen-
des oder alleinstehendes Element)

Nichtäquivalenz durch
Korrespondenz

Räumliche
Korrespondenz
(1. Antwortkategorie)

Alter

4	36,1	41,7
5	45,1	51,0
6	51,0	58,8

(Angaben in Prozent)

Da in der räumlichen Korrespondenzaufgabe die Paarbildungen auch anschaulich nahegelegt werden ("ein Mann geht mit einer Frau spazieren"), sind bei dieser Aufgabe Erklärungen durch Korrespondenz noch etwas häufiger. Bei der letzten Teilaufgabe der "Äquivalenzaufgabe", in der ein Element weggenommen wird, um die Anfälligkeit des Kindes für irreführende Längenreize zu beobachten, finden sich viele Hinweise auf die durchgeführte Operation, aber nur ganz wenige Kinder begründen ihr Urteil zur Größenrelation der Mengen über die Korrespondenzrelation. Im beobachtbaren Verhalten ist das Korrespondenzlegen relativ schwer zu beobachten (z.B. dann, wenn das Kind die Steine, die zueinandergehören, ganz dicht nebeneinander schiebt), weil sich viele 5- und 6-jährige Kinder auf die sichtbare Zuordnung verlassen (Augenbewegungen?). Das ist daran abzulesen, daß schwere Verletzungen der Zuordnung nur selten beobachtet wurden, und nur bei einigen vierjährigen Kindern.

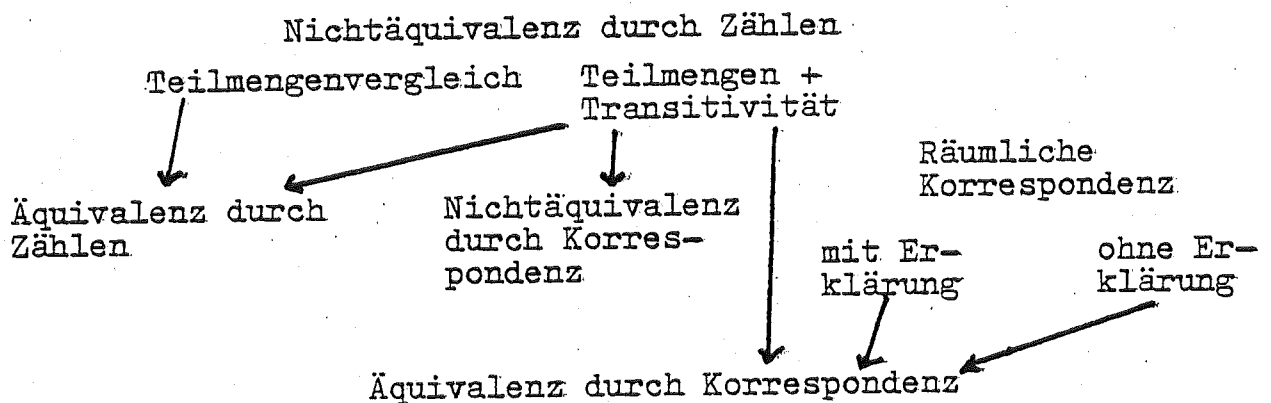
Stellt man die Antworten der Kinder in den Aufgaben "Nichtäquivalenz durch Korrespondenz" und "Räumliche Korrespondenz" in Kontingenztabellen zusammen, erkennt man keine systematischen Entwicklungsbeziehungen zwischen beiden Aufgaben. Die Werte sind

in etwa gleich über die Tabelle verteilt (z.B. räumliche Korrespondenzaufgabe ohne Erklärung * Nichtäquivalenz durch Korrespondenz, $\chi^2 = 3,12$, $df = 1$, $p > 0.05$). Dieses Ergebnis wird aus der formalen Ähnlichkeit der beiden Aufgaben verständlich.

Ordnet man die beobachteten Entwicklungsbeziehungen zwischen Zählaufgaben und Korrespondenzaufgaben graphisch an (s. Figur 1), erkennt man, daß sowohl bei den Zählaufgaben als auch bei den Korrespondenzaufgaben sich zwei Entwicklungsniveaus abheben. Interessanterweise lassen sich aus den entwicklungslogischen Beziehungen (wie sie sich in der Kontingenztafel ausdrücken) zweier Aufgaben keine direkten Folgerungen über die Entwicklungsbeziehungen zu einer dritten Aufgabe ableiten. Dies spricht dafür, daß die verschiedenartigen Entwicklungsverläufe durch sehr unterschiedliche qualitative Gemeinsamkeiten bzw. formale Unterschiede zustandekommen.

Figur 1

Entwicklungsbeziehungen zwischen Zähl- und Korrespondenzaufgaben
(Richtungspfeile sind für $p < 0.05$ in der Vorhersageanalyse eingezeichnet.
Aufgaben zwischen denen keine Verbindungslinien eingezeichnet sind, zeigen keine systematischen Beziehungen.)



2. Zahlinvarianz und Beziehung dieser Aufgabe zu Zähl- und Korrespondenzaufgaben:

2.1. Zahlinvarianzaufgabe

Für alle untersuchten Kinder ist das Herstellen der Eins-Zu-Eins-Korrespondenz für die Zahlinvarianzaufgabe keine Schwierigkeit.

Insgesamt wurden nur drei Kinder beobachtet, denen besondere Hilfestellung für diese Aufgabe gegeben werden mußte. Bittet man das Kind zu erklären, warum es jetzt gleichviele sind, findet man bei den 4-jährigen Kindern nur relativ selten Hinweise auf eine numerische Strategie, mit der sie ihr Urteil begründen. Ihre Antwort ist meist intuitiv oder tautologisch ("ich weiß es halt, daß es gleichviele sind") (75 % der Kinder). Dagegen weisen die älteren Kinder eher auf die gleiche Länge der Reihe hin (die roten und die blauen Reihen sind gleichlang" oder "weil keines übersteht", "die sind gleichlang"). (Länge der Reihe als Antwort: 11,1 % (4 J.), 23,5 % (5 J.), 19,6 % (6 J.)). Auch weisen die 5- und 6-jährigen weitaus häufiger auf die Korrespondenzbeziehung hin (5,7 % (4 J.), 15,7 % (5 J.), 13,7 % (6 J.)), $\chi^2 = 9,78$, $df = 2$, $p < 0.01$), z.B. "weil immer ein rotes und ein blaues zusammensteht", oder "jedes blaue hat ein rotes" usw.. Schließlich wird nur ein vierjähriges Kind beobachtet, das die Mengen abzählt, während 9,8 % der Fünf- und 13,7 % der Sechsjährigen die beiden Mengen aus roten und blauen Steinen abzählen, um sich der Gleichheit zu vergewissern. Man findet also bei den älteren Kindern mit größerer Wahrscheinlichkeit Hinweise auf Operationen, die dazu dienen, die numerische Gleichheit der Mengen festzustellen.

Bei der eigentlichen Zahlinvarianzaufgabe beobachtet man die typische bimodale Verteilung in den Antworten des Kindes. Sowohl beim Zusammenlegen als auch beim Auseinanderschieben versuchen die meisten Kinder konsistent zu antworten, gleichgültig, ob sie eine Veränderung der Mengen annehmen oder ihre Gleichheit bestätigen. Diese Konsistenz erhöht sich mit zunehmendem Alter. Die Verteilung der Antworten der Kinder läßt vermuten, daß die Kinder vor allem deshalb widersprüchliche Antworten geben, weil sie die Frageform und die Bedeutung der erfragten Relationen ("gleichviel", "mehr", "weniger") nicht immer gleich auffassen.

Vor allem bei den 4-jährigen Kindern beobachtet man die Tendenz, auf die Frage, ob es noch gleichviele Steine sind, mit "ja" zu antworten, obwohl das Kind nachher mit Sicherheit sagt, die eine

Menge sei mehr (immerhin bei 13,9 % beim Zusammenschieben und bei 25 % der Antworten beim Auseinanderziehen findet sich diese Antworttendenz). Vermutlich fassen jüngere Kinder die "gleichviel"-Frage anders auf als die Frage, ob eine Menge mehr sei.

Die bimodale Verteilung der Antworten wird durch die Zusammenfassung aller korrekten Urteile bei beiden Transformationen veranschaulicht (s. Tabelle 8).

Tabelle 8

Summe der korrekten Urteile
bei beiden Transformationen
(Angaben in Prozent)

<u>Alter</u>	4	5	6	
Anteil korrekter Urteile				
0	63,9	51,0	41,2	$\left\{ \begin{array}{l} \chi^2 = 33,8 \\ df = 2 \\ p < 0.0001 \end{array} \right.$
1 - 5	27,8	25,5	7,8	
6	8,3	23,5	51,0	

Typische operationale Erklärungen im Sinne Piagets sind relativ selten. Hinweise auf die kompensatorische Beziehung zwischen Länge und Dichte, auf die Korrespondenz, auf die Addition/Subtraktion und schließlich auf die Reversibilität finden sich nur bei einer kleinen Zahl von Kindern, die sich auch in etwa gleichmäßig über die Altersgruppen verteilen. Die Kinder weisen dagegen häufig auf die durchgeführte Transformation hin (z.B. "du hast die blauen zusammengeschoben", "die sind jetzt auseinander" in Verbindung mit dem Urteil, die Mengen seien noch gleich) und die älteren Kinder tun dies weitaus häufiger als die jüngeren (4 Jahre: 5,6 %, 5 Jahre: 15,7 %, 6 Jahre: 24,5 %, $\chi^2 = 11,5$, $df = 2$, $p < 0.0001$). Gerade die ältesten Kinder verwenden die

Beschreibung der Transformation bei operationalen Antworten in ähnlicher Weise wie in präoperationalen Zusammenhängen; inhaltlich erkennt man kaum einen Unterschied in der Formulierung des Kindes, würde man nicht zugleich sein Urteil kennen, z.B. sagt ein Kind "Die blauen Steine sind mehr, weil du sie halt zusammengeschoben hast"; für die operationale Antwort: "Die sind gleichviele, weil du sie nur zusammengeschoben hast." Da das qualifizierende "nur" in den Antworten vieler Kinder fehlt, kann man ableiten, daß die Kinder in beiden Antworten (operational und präoperational) die Transformation beschreiben und ihr Urteil zugleich als evident betrachten.

Wie häufig zählen Kinder bei diesen Aufgaben? Bei den jüngsten Kindern zählen nur wenige, die älteren wenden diese Kontrolle häufiger an, eine Parallele zu den anderen Korrespondenzaufgaben (2,8 % (4 J.), 7,8 % (5 J.), 13,7 % (6 J.), $\chi^2 = 7,37$, $df = 2$, $p < 0.05$).

Für die Kodierung der Stadien wurden bei der Zuordnung nach Piaget sowohl die Anzahl der korrekten Urteile als auch die Erklärungsform des Kindes miteinbezogen, bei den Stadien im Sinne Brainerds nur die Konsistenz der Urteile des Kindes herangezogen. Nimmt man die strengeren Kriterien von Piaget, so löst nur ein relativ kleiner Teil der Kinder die Zahlinvarianzaufgabe, obwohl eine deutliche Veränderung zwischen 5 und 6 Jahren stattfindet (Stadienangaben nach Piaget, vgl. Tabelle 9).

Tabelle 9

Verteilung der Kinder auf die Stadien Piagets
aufgeschlüsselt nach Altersgruppen (in Prozent)

	Alter	4	5	6	
Stadien nach Piaget					
1		91,7	66,7	47,1	$\left\{ \begin{array}{l} \chi^2 = 16,1 \\ df = 1 \\ p < 0.001 \end{array} \right.$
2		5,6	19,6	29,4	
3		2,8	13,7	23,5	

Da für die Kodierung nach Brainerd die konsistenten Urteile des Kindes herangezogen wurden, die untersuchten Kinder aber relativ hohe Konsistenz in ihren Urteilen zeigten, beobachtet man Stadium 2 relativ selten. Damit stellt sich natürlich die Frage, welche Bedeutung man einer solchen Stadienbeschreibung noch zuordnen kann, da sie mit zunehmendem Alter einer dichotomen Kodierung gleicht. Bei den sechsjährigen Kindern beobachtet man nämlich eine fast völlige Konsistenz in ihren Urteilen bei der verwendeten Fragetechnik nach Rothenberg (1969) (s. Tabelle 10).

Tabelle 10

Verteilung der Kinder auf die Stadien
nach Brainerd
aufgeschlüsselt nach Altersgruppen
(in Prozent)

Alter	4	5	6
Stadien nach Brainerd			
1	91,7	66,7	47,1
2	2,8	5,9	—
3	5,6	27,5	52,9

Als Ergänzung zur Zahlinvarianzaufgabe wurde die Aufgabe zur qualitativen Korrespondenz durchgeführt. Bei dieser Aufgabe wird die (qualitative) Korrespondenz zwischen den Objekten durch paarweise gleiche Gegenstände nahegelegt. Obwohl die Kinder auf diese Korrespondenzbeziehung nur gelegentlich hinweisen und erneut die Erklärung mittels der Transformation ("du hast sie nur auseinander-geschoben") die häufigste operationale Antwort ist, lösen diese Aufgabe ein höherer Anteil von Kindern als die traditionelle Zahl-invarianzaufgabe. Eine Analyse der Stadienzuordnung anhand einer Kreuztabelle zeigt, wodurch dieser größere Erfolg der Kinder bei qualitativen Korrespondenzaufgaben zustandekommt. Kinder, die bei der

Zahlinvarianzaufgabe Piagets Stadium 3 zugeordnet waren, lösen stets auch die qualitative Korrespondenzaufgabe. Umgekehrt fallen auch die Kodierungen für Stadium 1 bei beiden Aufgaben zusammen. Offensichtlich erfahren Kinder, die im Übergangsstadium sind, durch die Reizanordnung in der qualitativen Korrespondenzaufgabe die wichtigste Unterstützung und sie lösen die Aufgabe erfolgreicher als die Zahlinvarianzaufgabe (vgl. 10 % der Kinder, die bei der Zahlinvarianzaufgabe Stadium 2 zugeordnet waren, erhalten bei der qualitativen Korrespondenz die Kodierung für Stadium 3) (Tabelle 11).

Tabelle 11

Entwicklungsbeziehung zwischen den Aufgaben
zur Zahlinvarianz und zur qualitativen
Korrespondenz

Qualitative Korrespondenz
(Stadien nach Piaget)

		1	2	3
Zahlin- varianz (Stadien nach Piaget)	1	89	1	1
	2	5	8	14
	3	0	0	20

Modell I: Wechselbeziehung

$$V_p = 0,955$$

$$U = 0,318$$

$$z = 13,7$$

$$p < 0.0001$$

$$N = 138$$

Eine Analyse der Tabelle mit der Vorhersageanalyse zeigt zugleich, daß das Modell der synchronen Entwicklung bzw. des wechselseitigen Einflusses sehr gut durch die Daten erfüllt wird. Die schraffierten Zellen stellen die Fehlerzellen dar ($V_p = 0,955$, $U = 0,318$, $z = 13,7$, $p < 0.0001$). Nur 15,2 % der Zellen enthalten Kodierungen, in denen die Stadienangaben für die beiden Aufgaben nicht übereinstimmen, davon entfallen 67 % auf die Zelle, in der Kinder Stadium 2 in der Zahlinvarianzaufgabe und Stadium 3 für die qualitative Korrespondenz erfüllen.

Von Interesse ist es noch, die Altersverteilung der Zahlinvarianzaufgabe zu untersuchen. An einer Gruppierung aller Kinder nach Abschnitten von jeweils 3 Monaten sieht man, wie bis zum Alter von 65 Monaten (5;4) korrekte Antworten auf die Zahlinvarianzaufgabe relativ selten sind, obwohl einige wenige Kinder schon mit vier Jahren eine korrekte Lösung finden. Für die Drei-Monatsgruppierung ab 68 Monaten (5;8) findet sich dann in jeder Untergruppe etwa ein Drittel der Kinder, die die Zahlinvarianzaufgabe im Sinne Piagets korrekt lösen, aber selbst bei den älteren Kindern (81 Monate und älter) ist es noch ein sehr hoher Anteil, die Stadium 3 nicht erreichen (punktbiserial Korrelationen zwischen Monaten und der dichotomen Kodierung der Aufgabe, $p_{bis} = 0.25$, $t = 3,03$, $df = 135$, $p < 0.005$). Kodiert man die Antworten der Kinder nach den Kriterien von Brainerd, erhält man dagegen ab 69 Monaten (5;8) einen jeweils gleich großen Anteil von Kindern, die Stadium 3 zugeordnet sind bzw. Stadium 1 und 2 zugehören (punktbiserial Korrelation zwischen Monaten und Zahlinvarianzaufgabe, dichotom kodiert nach Brainerd, $p_{bis} = 0.41$, $t = 5,2$, $df = 136$, $p < 0.00001$). Anders als bei den früher beschriebenen Kardinationsaufgaben zeigt die Untersuchung der Altersverteilung nicht so erhebliche Verschiebungen ab einem bestimmten Lebensalter. Das liegt aber auch daran, daß in der untersuchten Altersspanne noch ein sehr großer Teil der Kinder diese Aufgabe nicht bewältigt. Zugleich sprechen die Ergebnisse dafür, daß man die Zahlinvarianzaufgabe nicht so leicht in ein Fertigkeitenmodell einordnen könnte, wie die Zähl- und Korrespondenzaufgaben. Fertigkeiten, die sich im Laufe des Vorschulalters verbessern und zunehmend koordiniert werden.

2.2. Zahlinvarianzaufgaben in Beziehung zu Zähl- und Korrespondenzaufgaben - Mengenvergleiche als Vorbedingung der Invarianz

Die Entwicklungsbeziehungen zwischen der Zahlinvarianzaufgabe und verschiedenen Zähl- und Korrespondenzaufgaben wurden sehr intensiv untersucht, da die Vermutung naheliegt, daß die Fähigkeit

des Kindes, Mengenvergleiche systematisch vorzunehmen, eine Vorbedingung der Zahlinvarianz ist (z.B. Rothenberg und Orost, 1969, Scandura und Scandura, 1980). Diese Hypothese soll im Anschluß an die Übersicht über verschiedenartige Ergebnisse weiter diskutiert werden.

Um die Ergebnisse übersichtlich und lesbar darzustellen, wird darauf verzichtet, jeden Einzelvergleich zu belegen. Um die Allgemeingültigkeit der Strategien zu prüfen, wurden zudem sogenannte Indikatorvariablen aus Teilvariablen zum Mengenvergleich gebildet, die eine systematische Entwicklungsbeziehung zwischen Zahlinvarianz und Vergleichsstrategien des Kindes belegen sollen.

Äquivalenz durch Zählen, d.h. das aktive Herstellen gleich großer Mengen, ist eine Aufgabe, die Kindern in der Regel leichter fällt als die Zahlinvarianzaufgabe selbst. Das gilt für Kodierung der Zahlinvarianz nach Piaget (Entwicklungspriorität von Äquivalenz durch Zählen, $V_p = 0,41$, $p < 0.05$), für die Kodierung der gleichen Aufgabe nach Brainerd ($V_p = 0,300$, $p < 0.05$) und auch für die Lösung der Aufgabe zur qualitativen Korrespondenz ($V_p = 0,28$, $p < 0.05$). Ähnliche Vergleiche wurden auch mit der Aufgabe zur Nichtäquivalenz durch Zählen durchgeführt, und auch hier läßt sich relativ gut belegen, daß das Kind den Mengenvergleich durch Zählen vor der Zahlinvarianzaufgabe nach Piaget (dichotome Kodierung beider Aufgaben, $V_p = 0,709$, $p < 0.001$) und der Zahlinvarianz nach Brainerd (ebenfalls dichotome Kodierung, $V_p = 0,672$, $p < 0.001$) meistert.

Schließlich können die Entwicklungsrelationen zwischen den drei Korrespondenzaufgaben und der Zahlinvarianzaufgabe betrachtet werden. Für die Nichtäquivalenz durch Korrespondenz zeigt sich eine Priorität dieser Aufgabenstellung in der Entwicklung bei der Kodierung nach Brainerd ($V_p = 0,433$, $p < 0.01$) und nach der Kodierung von Piaget ($V_p = 0,434$, $p < 0.01$). Auch die Ergebnisse zur räumlichen Korrespondenz sind eindeutig zugunsten der Korrespondenzaufgabe zu interpretieren (3 x 2 Kontingenztafel mit dichotomer Kodierung der Korrespondenzaufgabe: Entwicklungspriorität gegenüber Zahlinvarianz/Piaget: $V_p = 0,699$, $p < 0.001$) und

gegenüber Zahlinvarianz/Brainerd: $V_p = 0,695$, $p < 0.001$). Hier haben die Auswertungskriterien übrigens auch einen Einfluß, denn die Entwicklungspriorität läßt sich besser belegen, wenn man nur die korrekte Lösung des Kindes bei der Korrespondenzaufgabe heranzieht (Vergleich zu Zahlinvarianz/Piaget: $V_p = 0,699$, $p < 0.001$) als wenn man zusätzlich die Erklärung für die Korrespondenz mit berücksichtigt ($V_p = 0,322$, $p < 0.01$). (1) Schließlich läßt sich zeigen, daß die Zahlinvarianzaufgabe vielen Kindern leichter fällt als die Aufgabe zur Äquivalenz durch Korrespondenz (Piaget: $V_p = 0,383$, $p < 0.05$; Brainerd: $V_p = 0,384$, $p < 0.05$, Anordnung der Aufgaben in 3×2 Kontingenztabellen); hier ist die Beziehung aber nicht so eindeutig abgesichert, da die Aufgabe zur Äquivalenz durch Korrespondenz den meisten Kindern doch erhebliche Schwierigkeiten bereitet (nur 27 % der Kinder lösen die Gesamtaufgabe richtig). Diese Verteilung der Aufgabe fällt bei der Interpretation der Entwicklungsbeziehung ins Gewicht.

Um die Bedeutung von Mengenvergleichen für die Zahlinvarianz zu klären, wurden sogenannte Indikatorvariablen gebildet, die sich aus den Leistungen des Kindes bei unterschiedlichen Zähl- bzw. Korrespondenzaufgaben zusammensetzen.

Der Sinn von Indikatorvariablen ist es, Lösungsstrategien des Kindes bei verschiedenen Aufgaben und den Erfolg bei qualitativ ähnlichen, aber durch verschiedenartige Faktoren beeinflusste Aufgaben zu betrachten. Daher werden die Variablen logisch verknüpft (vgl. und/oder in der Definition der Variablen).

Die erste Variable - EQUZZ - setzt sich aus verschiedenen Niveaus der Aufgaben 'Äquivalenz durch Zählen' und 'Nichtäquivalenz durch Zählen' zusammen. Eine Beschreibung der Werte dieser Variable findet sich als Ergänzung zur nachfolgenden Tabelle. Die Anordnung

-
- (1) Die Beziehung zwischen räumlicher Korrespondenz und Zahlinvarianz wird auch belegt durch die Untersuchung der Altersgruppe zwischen 54 und 66 Monaten ($N = 52$), die die deutlichste Veränderung bei den Korrespondenzaufgaben zeigt. Für diese Kinder gibt der Vergleich zwischen Piagets Zahlinvarianzaufgabe und der räumlichen Korrespondenzaufgabe eine gute Unterstützung der o.g. Reihenfolge ($V_p = 0,64$, $U = 0,106$, $Z = 2,87$, $p < 0.005$); das gleiche gilt für die Kodierung der Zahlinvarianz nach Brainerd ($V_p = 0,62$, $U = 0,101$, $Z = 2,87$, $p < 0.005$).

dieser Variable mit den beiden Formen der Zahlinvarianzaufgabe bestätigt die Ergebnisse aus den Einzelvergleichen: die meisten Kinder bewältigten die Zählaufgaben eindeutig vor der Zahlinvarianzaufgabe (Tabelle 12).

Eine detailliertere Analyse der Kinder, die trotz schlechter Zählleistungen Niveau 2 oder 3 in der Zahlinvarianz erreichen (Zellen a und b in Tabelle 12) zeigt für die Kinder in Zelle a: 5 dieser Kinder zählen, um die Lösung bei der Zahlinvarianz zu finden (30 %), wenden also den Mengenvergleich an, obwohl sie ihn noch nicht völlig beherrschen. Nur zwei der Kinder dieser Gruppe geben eine angemessene operationale Erklärung, nämlich einen Hinweis auf die Transformation (12 %). Dagegen geben alle Kinder, die in Zelle b angeordnet sind, eine angemessene operationale Erklärung. Diese Beobachtungen bei einigen Kindern deuten an, daß das Kind einerseits Mengenvergleiche einsetzt, um die Zahlinvarianz zu überprüfen, daß aber auch Kinder, die nicht systematisch Mengenvergleiche durch Zählen vornehmen können, durch das Berücksichtigen der Transformation eine angemessene Lösung der Invarianz finden. Eine notwendige Beziehung zwischen Mengenvergleich und Zahlinvarianz ist daran nicht abzulesen.

Tabelle 12

Entwicklungsbeziehungen zwischen Mengenvergleichen durch Zählen und der Zahlinvarianzaufgabe

Zahlinvarianzaufgabe
(Stadien nach Piaget)

Indikator-
variable
EQUZZ

	1	2	3
0	27	0	0
1	29	12 (a)	5 (b)
2	3	0	1
3	32	15	14

Entwicklungspriorität
von EQUZZ

$$V_p = 0,314$$

$$U = 0,190$$

$$z = 2,97$$

$$p < 0.005$$

N = 138

Niveaus der Variable EQUZZ (Mengenvergleich durch Zählen

- (0) weniger als vier Vergleiche korrekt bei Äquivalenz durch Zählen und weniger als zwei bei Nichtäquivalenz
- (1) alle vier Vergleiche bei Äquivalenz korrekt oder beide bei Nichtäquivalenz
- (2) alle vier Vergleiche korrekt bei Äquivalenz und beide bei Nichtäquivalenz
- (3) alle vier Vergleiche korrekt bei Äquivalenz und Transitivitätsfrage bei Nichtäquivalenz korrekt beantwortet

Tabelle 13

Mengenvergleiche durch Zählen in ihrer Entwicklungsbeziehung zur Zahlinvarianzaufgabe

Zahlinvarianz (Brainerd-Stadien)

EQUZZ.

(Definition siehe vorige Seite)

	1	2	3
0	27	0	0
1	29	3	14
2	3	0	1
3	32	1	28

Entwicklungspriorität der Variable EQUZZ (schraffierte Zellen sind Fehlerzellen)

$$V_p = 0,315$$

$$U = 0,19$$

$$z = 2,91$$

$$p < 0,005$$

$$N = 138$$

In gleicher Weise wurde für die Korrespondenzaufgaben eine Indikatorvariable definiert (EQUCOCO): Die Tabellen auf den folgenden Seiten zeigen zwar eine Unterstützung der vermuteten Priorität von Korrespondenzkonzepten in der Entwicklung, doch ist diese Reihenfolge der beiden Konzepte nicht so gut abgesichert wie bei den Zählaufgaben. Eine Erklärung dafür findet sich in den besonderen Schwierigkeiten, die selbst noch die ältesten Kinder bei der Aufgabe 'Äquivalenz durch Korrespondenz' hatten, mehrdeutige räumliche Reize durch eine ein-eindeutige Korrespondenzrelation aufzuheben.

Eine dritte Indikatorvariable wurde für die beiden Aufgaben aufgestellt, die den Vergleich von nichtäquivalenten Mengen (entweder über Zählen oder über Korrespondenz) einschließen, dabei fließt auch das Verständnis des Kindes für die Transitivitätsbeziehung zwischen drei verschieden großen Mengen mit ein (NEQUCOZ). Auch für diese Variable zeigt sich, daß Kinder in den untersuchten Altersgruppen, systematische Mengenvergleiche früher vornehmen können als Vergleiche von Mengen, an denen räumliche Transformationen vorgenommen wurden (also der Zahlinvarianz). Eine Definition dieser Indikatorvariablen findet sich ebenfalls als Ergänzung zu den entsprechenden Tabellen. Die Unterstützung für die vermutete Entwicklungsbeziehung ist hier wiederum wesentlich besser als bei den Korrespondenzaufgaben für sich genommen. (1)

(1) Neben solchen qualitativen Vergleichen wurde auch eine stufenweise Regression berechnet, in der die verschiedenen Zählaufgaben und Korrespondenzaufgabe eingingen, dazu die Ordinationsaufgabe nach Brainerd, um die Anzahl richtiger Urteile des Kindes in der Zahlinvarianzaufgabe vorherzusagen. (Diese Analyse wird hier nur am Rande erwähnt, weil sie der Art, wie

Tabelle 14

Mengenvergleiche durch Korrespondenz in ihrer Entwicklungsbeziehung zur Zahlinvarianzaufgabe

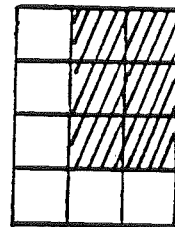
Zahlinvarianz
(Piaget Stadien)

EQUCOCO

(Erläuterung
der Niveaus
der Aufgabe)
s. u.

	1	2	3
0	14	2	0
1	60	10	11
2	7	4	0
3	10	11	9

N = 138



Modell I:

Entwicklungspriorität
der Korrespondenzaufgaben

$V_p = 0,264$

$U = 0,265$

$z = 3,28$

$p < 0.001$

die Aufgaben entworfen sind nur begrenzt gerecht wird. Um eine zuverlässige Vorhersage zu machen, müßten die Einzelaufgaben auch aus einer größeren Zahl von Items bestehen). In einem Regressionsmodell, das ein maximales R^2 aus 8 Vorhersagevariablen zu finden versucht, ergibt sich ein mäßiger Vorhersagewert ($R^2 = 0,237$, $df = 8$, $MS = 28,94$, $F = 9,01$, $p < 0.0001$), der aufgrund der qualitativen Gestaltung der Vorhersagevariablen aber doch relativ hoch erscheint. Einzelne Variablen mit signifikanten F-Wert sind jedoch nur das Lebensalter in Monaten ($F = 4,16$, $p < 0.05$), die Variable Äquivalenz durch Korrespondenz ($F = 8,24$, $p < 0.005$) und die Aufgabe zur räumlichen Korrespondenz ($F = 7,30$, $p < 0.01$). Interessant ist, daß die Anzahl richtiger Urteile in der Ordinationsaufgabe keinen bedeutsamen Anteil zur Vorhersage der Leistung in der Zahlinvarianz leistet. Die ordinale Theorie der Zahlentwicklung ließe zumindest einen mittleren Zusammenhang beider Aufgaben vermuten.

EQUCOCO - Definition der Aufgabenniveaus (Mengenvergleich durch Korrespondenz):

- (0) bei der Nichtäquivalenz durch Korrespondenz weniger als zwei Vergleiche richtig, bei Äquivalenz durch Korrespondenz weniger als drei
- (1) bei Nichtäquivalenz zwei Vergleiche richtig oder bei Äquivalenz drei Vergleiche richtig
- (2) bei Nichtäquivalenz zwei Vergleiche korrekt und bei Äquivalenz drei Vergleiche korrekt
- (3) bei Nichtäquivalenz Vergleiche und Transitivität der Mengen richtig beantwortet, bei Äquivalenz gleichzeitig drei Vergleiche richtig

Tabelle 15

Mengenvergleiche durch Korrespondenz in ihrer Entwicklungsbeziehung zur Zahlinvarianzaufgabe

Zahlinvarianz
(Brainerd-Stadien)

	1	2	3
0	14	1	1
1	60	1	20
2	7	1	3
3	10	1	19

Modell I:
Entwicklungspriorität
der Korrespondenzaufgaben

$$V_p = 0,266$$

$$U = 0,267$$

$$z = 3,63$$

$$p < 0.001$$

EQUCOCO

Tabelle 16

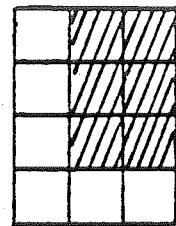
Strategien zum Vergleich nichtäquivalenter Mengen
in ihrer Entwicklungsbeziehung zur Zahlinvarianz

Zahlinvarianz
(Stadien nach Piaget)

NEQUCOZ
(Definition
der Niveaus)
s.u.

	1	2	3
0	11	1	0
1	30	2	0
2	21	5	6
3	29	19	14

N = 138



Modell I:

Entwicklungspriorität
der Aufgaben zum Mengen-
vergleich

$$V_p = 0,459$$

$$U = 0,188$$

$$z = 4,94$$

$$p < 0.0001$$

NEQUCOZ - Definition der Niveaus

- (0) Nichtäquivalenz durch Zählen (weniger als 4 Vergleiche richtig) und Nichtäquivalenz durch Korrespondenz (weniger als zwei Vergleiche richtig)
- (1) Nichtäquivalenz durch Zählen (vier Vergleiche richtig) oder Nichtäquivalenz durch Korrespondenz (zwei Vergleiche korrekt)
- (2) Nichtäquivalenz durch Zählen (vier Vergleiche) und Nichtäquivalenz durch Korrespondenz (zwei Vergleiche)
- (3) Nichtäquivalenz durch Zählen (vier Vergleiche und Transitivität zwischen den nicht benachbarten Mengen) und Nichtäquivalenz durch Korrespondenz (zwei Vergleiche und Transitivität zwischen den nicht benachbarten Mengen)

Tabelle 17

Strategien zum Vergleich nichtäquivalenter Mengen
in ihrer Entwicklungsrelation zur Zahlinvarianz

Zahlinvarianzaufgabe
(Stadien nach Brainerd)

NEQUCOZ

(Definition
der Niveaus
auf der
vorherigen
Seite)

	1	2	3
0	11	1	0
1	30	0	2
2	21	1	10
3	29	2	31

N = 138

Modell I:

Entwicklungspriorität
der Indikatorvariablen
(Mengenvergleiche bei
asymmetrischen Größen-
beziehungen)

$$V_p = 0,459$$

$$U = 0,188$$

$$z = 4,81$$

$$p < 0.0001$$

2.3 Guttman-Skalierung der Kardinationsaufgaben

Um die entwicklungslogischen Beziehungen zwischen den verschiedenen Kardinationsaufgaben zu klären, wurde eine Guttman-Skalierung mit den dichotomen Kodierungen der Aufgaben zum Mengenvergleich durch Zählen und durch Korrespondenz sowie der Zahlinvarianzaufgaben durchgeführt.

Obwohl der Koeffizient der Reproduzierbarkeit für die gesamte Gruppe von 138 Kindern noch relativ hoch ist ($CR = 0,81$), erreicht der Skalierbarkeitskoeffizient nach Green nicht die Mindestgrenze für eine zufriedenstellende Skalierung von .50

($Sc = 0,394$). Eine detaillierte Analyse zeigt auch, daß die typischen Kombinationsmuster der Guttman-Skalierung für die untersuchte Gruppe von Aufgaben relativ selten sind. Häufig findet man Kombinationen, in denen Kinder nur einzelne Aufgaben einer Aufgabenklasse nicht bewältigen, obwohl die Vergleichsaufgabe keine Schwierigkeit zu machen scheint. Man kann vermuten, daß es spezifische Aufgabenfaktoren sind, die die fehlerhafte Lösung des Kindes verursachen, wobei diese Faktoren aber keine unmittelbare Beziehung zu der relativen Schwierigkeit der Kardinationsaufgaben in der Entwicklung haben müssen (z.B. ein Kind zeigt Zählfehler im Mengenvergleich, während es zugleich die Zahlinvarianz beherrscht). Daher ist eine strenge entwicklungslogische Abfolge der Kardinationsaufgaben nicht zu erwarten. (1)

2.4. Zahlinvarianz und Zählaufgaben

Kinder beherrschen offenbar eine Vielzahl von quantitativen Strategien, um kleinere Mengen von Gegenständen zu vergleichen, ehe sie das Prinzip der Zahlinvarianz verstehen. So ist es nicht erstaunlich, daß auch Zählaufgaben, in denen weniger der kardinale Aspekt (nämlich der Vergleich verschieden großer Mengen) als vielmehr der ordinale (also die Ordnungsbeziehung innerhalb der Reihe der natürlichen Zahlen) eine Rolle spielt, von den meisten Kindern vor der Zahlinvarianz gelöst werden. Diese beiden Ergebnisse belegen zugleich, daß das Kind zumindest auf einer konkreten repräsentationalen Ebene (nämlich für Mengen die es numerisch identifizieren kann) ordinale und kardinale Aspekte von Zahlen anwendet, auch wenn es die Koordination dieser Teilaspekte der Zahl nur im Ansatz verstehen sollte.

(1) Die Entwicklungsbeziehungen zwischen den verschiedenen Kardinationsaufgaben sollen aber erneut mit Hilfe der Ordnungsanalyse von Krus (1977) geprüft werden, da diese Methode auch das Auffinden systematischer Ordnungsbeziehungen in der Entwicklung zwischen einer kleinen Gruppe von Aufgaben erlaubt. Diese Analyse ist zur Zeit in Vorbereitung.

Bei den Zählaufgaben wird zunächst das Ergebnis für die Aufgabe "Beliebigkeit der Reihenfolge beim Zählen" interpretiert. Diese Aufgabe ist für sich genommen sehr interessant, weil sie - wie früher erwähnt - zwei Aspekte des Zählens prüft: die Position der Objekte spielt innerhalb der Zählfolge keine Rolle und insbesondere hat sie keinen Einfluß auf die Kardinalzahl (die Anzahl der Objekte). Tabelle 18 stellt die Wechselbeziehung zwischen dieser Aufgabe und der Zahlinvarianzaufgabe nach Piaget dar. Man sieht, daß die Entwicklungspriorität der Zähl Aufgabe gut bestätigt wird, was in gleicher Weise für eine veränderte Kodierung der Zähl Aufgabe gilt (vgl. Teil 2 der Tabelle 18) (1). Es wird hier darauf verzichtet, auch die anderen Kodierungen der Zahlinvarianz heranzuziehen, für die sich aber das berichtete Ergebnis gleichfalls bestätigen läßt.

Diese Zähl Aufgabe hat eine interessante Parallele zu Piagets letzter Deutung der Invarianzkonzepte. Piaget spricht von den Verschiebungen einzelner Elemente in der Invarianzaufgabe und den Korrespondenzen, die zwischen den Zuständen vor und nach der Verschiebung konstruiert werden können. Es gilt daher das logische Prinzip der Kommutativität (was an einer Stelle weggenommen wurde, wurde an der anderen hinzugefügt, und umgekehrt). Die gleichen Operationen (Verschieben von Objekten) könnte man auch bei einer Aufgabe zur Identitätsinvarianz anwenden (vgl. Elkind, 1967 zum Begriff der 'identity conservation'). In einer Reihe von Gegenständen (z.B. 7 Spielsteine, die linear angeordnet sind) ändert das Verschieben eines Elements an eine andere räumliche Position nichts an der Anzahl der Objekte. Auf formaler Ebene sind sich die Aufgaben zur Identitätsinvarianz und zur "Beliebigkeit der Reihenfolge beim Zählen" also ähnlich, auch wenn das Kind bei der letzteren Aufgabe eine konkrete Repräsentation der Menge hat. Es liegen keine Untersuchungen vor, die

(1) Gelman (1978) berichtet, sie habe ebenfalls eine Untersuchung zur Entwicklungsbeziehung zwischen beiden Aufgaben durchgeführt. Ergebnisse wurden bisher noch nicht veröffentlicht.

versuchten, diese beiden Aufgaben zu vergleichen. Vermutlich meistert das Kind aber die Zählaufgabe etwas früher als die Identitätsinvarianz. Es liegt sogar die Hypothese nahe, daß die Erfahrungen des Kindes mit der Invarianz der Kardinalzahl gegenüber räumlichen Verschiebungen der Objekte eine Klasse von Operationen bildet, die dem Verständnis der Identitätsinvarianz zugrundeliegt. (eine andere Klasse von Operationen wären z.B. solche, die dem Kind das Kommutativitätsprinzip über die Korrespondenzbeziehung zwischen den beiden "logischen" Positionen des Objekts nahelegen). Hier zeigt sich also auf konkrete Weise, wie konkrete Erfahrungen des Kindes im Zählvorgang zu seinem Verständnis auch weiterführender logischer Prinzipien beitragen könnten. Man darf nicht vergessen, daß einige Autoren die Identitätsinvarianz wiederum als wichtige Vorbedingung der Invarianz (der Äquivalenzerhaltung) selbst betrachten (zur Diskussion des Forschungsstands und konträrer Positionen vgl. Brainerd und Hooper, 1978; S.A. Miller, 1978).

Tabelle 18

Zahlinvarianzaufgabe in Beziehung
zu Zählaufgaben

Zahlinvarianz
(Stadien nach Piaget)

Beliebigkeit der Reihenfolge beim Zählen		1	2	3
Kind glaubt an Mengenverände- rung (bei Zähl- fehler)	0	31	1	0
das Kind ist sich unsicher und zählt stets neu	1	5	1	0
das Kind glaubt nicht an die Mengenänderung zählt aber er- neut	2	29	7	2
das Kind zählt nur einmal und ist sich sicher	3	26	18	18

Modell I:

Kinder, die sich
der Größe der Menge
unsicher werden,
lösen auch noch
nicht die Zahlin-
varianz:

$$V_p = 0,886$$

$$U = 0,129$$

$$z = 9,59$$

$$p < 0.00001$$

N = 138

veränderte Kodierung der gleichen Tabelle

Zahlinvarianz
(Stadien nach Piaget)

Beliebigkeit der Reihenfolge beim Zählen	1	2	3
Das Kind glaubt an Mengenände- rung (zählt oder schätzt ab)	31	1	0
Das Kind ist un- sicher, will noch- mals zählen	34	8	2
Das Kind ist sich der Menge sicher	26	18	18

Modell II:

Beliebigkeit der
Reihenfolge beim
Zählen als eindeu-
tiger Entwicklungs-
vorläufer der Zahl-
invarianz

$$V_p = 0,539$$

$$U = 0,173$$

$$z = 4,88$$

$$p < 0.00001$$

N = 138

Die Seriation der Zahlen (nämlich der Mengen von 1 bis 6) wiederum ist noch deutlicher dem ordinalen Aspekt des Zahlverständnisses zuordnen. Die Deutung der Tabelle 19 in der die Wechselbeziehung zwischen Seriation der Zahlen und Zahlinvarianzaufgabe (kodiert nach alternativen Kriterien) dargestellt ist, zeigt, daß die Seriation der Zahlen eindeutig der Zahlinvarianz in der Entwicklung vorausgeht. Dieses Ergebnis ist keinesfalls selbstverständlich; betrachtet man sich nämlich die Verteilung der beiden Aufgaben über die Lebensmonate, ergeben sich gerade für die Bereiche 4 - 5;5 Jahre noch erhebliche Variationen bei beiden Aufgabenformen. Kinder aber, die die Zahlinvarianz beherrschen, haben auch ein grundlegendes Verständnis der ordinalen Folge der ersten natürlichen Zahlen; und auch des Kardinalzahlaspekts wie die früher diskutierten Ergebnisse belegen.

Die Seriation der Zahlen selbst zeigt übrigens keine systematischen Wechselbeziehungen zur Aufgabe Beliebigkeit der Reihenfolge beim Zählen. Offenbar werden hier unterschiedliche qualitative Aspekte des Umgangs mit Zahlen gemessen. Auch in der Gruppe der vierjährigen Kinder, die mit beiden Aufgaben noch erhebliche Schwierigkeiten haben, ist kein systematischer Zusammenhang der beiden Aufgaben in der Kreuztabelle abzulesen (4 x 4 - Tabelle, $\chi^2 = 5,87$, $df = 9$, $p > 0.5$).

Tabelle 19

Beziehung zwischen Zahlinvarianz und Seriation der Zahlen (Zahl der Kinder, die bestimmte Aufgabenkombinationen erfüllen)

Zahlinvarianz
(Stadien nach Piaget)

Seriation der Zahlen

Fehler in beiden Durchgängen

1. Durchgang gelöst

Fehler beim 2. Durchgang

2 Durchgänge gelöst (beide Richtungen)

	1	2	3
0	21	1	0
1	14	1	0
2	11	4	0
3	45	21	20

N = 138

Zahlenseriation geht der Zahlinvarianz in der Entwicklung voraus:

$$V_p = 0,718$$

$$U = 0,128$$

$$z = 5,96$$

$$p < 0.001$$

Zahlinvarianz
(Stadien nach Brainerd)

Fehler in beiden Durchgängen

1. Durchgang gelöst

Fehler nur beim 2. Durchgang

2 Durchgänge gelöst (beide Richtungen)

	1	2	3
0	21	0	1
1	14	1	0
2	11	1	3
3	45	2	39

N = 138

Zahlenseriation geht der Zahlinvarianz in der Entwicklung voraus:

$$V_p = 0,663$$

$$U = 0,128$$

$$z = 5,55$$

$$p < 0.001$$

3. Einzelergebnisse der Ordinationsaufgaben und Wechselbeziehungen zwischen den Aufgaben:

3.1. Ordination - Seriation - Stabaufgabe

Ordinationsaufgabe

Die Ordinationsaufgabe besteht aus zwei Teilen: der Längenordination und der Gewichtsordination. Bei Teilvergleichen in der Längenordination zeigen nur die Vierjährigen einen relativ hohen Anteil von Fehlern. Das Kind mißt bei diesen Vergleichen die nebeneinanderliegenden Stäbe miteinander ab. 44,5 % der 4-jährigen machen bei mindestens einer oder mehreren Messungen einen Fehler. Bei den 5-jährigen sinkt die Fehlerrate auf 29,4 %, bei den 6-jährigen auf 16,7 %.

Für die Transitivität findet sich eine ähnliche Veränderung für die Altersgruppe, obwohl überraschend ist, wieviele 4-jährige Kinder hier eine richtige Antwort finden. Dabei darf man nicht vergessen, daß bei diesen Aufgaben Zufallsantworten nicht ausgeschlossen sind, d.h. mindestens einen Vergleich kann das Kind bei beliebiger Wahl mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.25$ richtig machen. 69,4 % der 4-jährigen lösen mindestens eine der Transitivitätsfragen korrekt. Beide Vergleichsaufgaben werden von 33,3 % der 4-jährigen, 45,1 % der 5-jährigen und 58,8 % der 6-jährigen richtig gelöst ($\chi^2 = 7,12$, $df = 2$, $p < 0.05$). Bewertet man die Antworten in Drei-Monatsschritten, so sind vollständige Transitivitätslösungen bis etwa 65 Monate (5;5) relativ selten, erst ab 72 Monaten (6;0) ist der Anteil der richtigen Transitivitätsantworten höher als der der falschen.

Am häufigsten begründen die Kinder ihre Transitivitätslösung durch intuitive Antworten, sie weisen z.B. auf den gerade durchgeführten Meßvorgang hin (Ich hab sie abgemessen, ich hab sie nebeneinander gelegt). Die Aufforderung zum Messen war Teil der Instruktion. Das Kind kann auch unspezifische Antworten geben (z.B. "ich hab's gesehen, ich hab's gewußt, hab ich mir ausgedacht, weil's halt so ist"). Beschreibungen der Längenbeziehungen, die aber nicht präzise sind, wurden als "ungenauere Mengenangaben" kodiert. Sie finden sich vor allem bei den 6-jährigen häufiger (4 J.: 11,1 %, 5 J.: 11,7 %, 6 J.: 21,6 %). Genaue Beschreibungen

der Transitivitätsbeziehungen, in denen das Kind die Größenbeziehungen zwischen den Stäben am Rande aus ihrer Längenrelation zu den mittleren Vergleichsstäben erschließt, beobachtet man, gemessen an der Zahl richtiger Lösungen, relativ selten (4 J. 2,8 %, 5 J. 9,8 %, 6 J. 11,8 %). Auch wenn die Kinder mit 6 Jahren also fast 60 % der Transitivitätsfragen richtig beantworten, beschreiben sie nur zu etwa 12 % mit einer exakten Erklärung die Transitivität. Diese Beziehung verdeutlicht, weshalb sprachliche Kriterien für die Einschätzung der Leistung des Kindes seit langem umstritten sind. Würde man bei der Ordinationsaufgabe nur Lösungen zulassen, die angemessen erklärt sind, bekäme man eine sehr konservative Schätzung der Fähigkeiten des Kindes bei dieser Aufgabe.

Einzelvergleiche bei der Gewichtsordination fallen den jüngeren Kindern etwas schwerer als die Längenvergleiche, in erster Linie weil das Abwägen zweier Kugeln und die Beschreibung der Gewichtsbeziehung für das Kind nicht so vertraut sind wie Längenmessungen. Bei den Einzelvergleichen machen relativ viele Kinder nur einen oder zwei Vergleiche falsch. Beobachtungen einer großen Zahl von Kindern lassen vermuten, daß sie bei Unsicherheiten abschätzen und daher die Gewichtsbeziehung u.U. falsch einschätzen. Alle vier Vergleiche bei der Gewichtsordination beantworten 33,3 % (4 J.), 47,1 % (5 J.) und 74,5 % (6 J.) richtig.

Bei der Gewichtstransitivität scheint die Einschätzung der Transitivitätsbeziehung den Kindern relativ leichter zu fallen, als ihre Schwierigkeiten bei den Einzelvergleichen vermuten lassen. Das gilt vor allem für die älteren Kinder (27,8 % (4 J.), 58,8 % (5 J.), 74,5 % (6 J.), $\chi^2 = 21,0$, $df = 2$, $p < 0.001$). Aus den Erklärungen kann man jedoch ersehen, daß vor allem bei den ältesten Kindern einige sind, die die Transitivitätsbeziehung umgehen, indem sie sich das absolute Gewicht (in der Regel das der schwersten Kugel) merken. Immerhin 11,8 % der 6-jährigen benennen das absolute Gewicht einer der roten Kugeln ("das da ist die schwerste"). Da die sprachliche Begründung eher ein konservativer Hinweis für die Lösungsmethode des Kindes ist, ist der Anteil der Kinder, die diese Lösungsstrategie anwendet, vermutlich noch größer.

Zugleich versuchen jüngere Kinder die Gewichtsbeziehung an der Größe der Kugeln abzulesen, was zu falschen Lösungen führen muß (die Größenbeziehungen zwischen den roten Kugeln waren so gestaltet, daß die schwere bei genauem Betrachten etwas kleiner erscheinen mußte). 19,44 % (4 J.), 13,7 % (5 J.) und 5,9 % (6 J.) der Kinder beschreiben die Größe der Kugel, um ihr Transitivitätsurteil zu begründen. Wie bei der anderen Teilaufgabe sind intuitive oder allgemeine Antworten des Kindes am häufigsten ("ich weiß es halt, ich hab's gewogen"), während präzisere Beschreibungen der Gewichtsrelation vor allem den

älteren Kindern vorbehalten sind. Ungenaue Beschreibungen der Gewichtsrelation, d.h. eine unkorrekte Koordination der Einzelvergleiche finden sich nur bei 3 oder 4 Kindern in jeder Altersgruppe. Die exakte Beschreibung der Transitivitätsbeziehung ist dagegen nur für die Kinder mit 6 Jahren zu beobachten, während sie für die anderen Kinder vernachlässigbar ist (2,8 % (4 J.), 3,9 % (5 J.), 13,7 % (6 J.), $\chi^2 = 10,6$, $df = 2$, $p < 0.01$).

Aus den beiden Teilaufgaben wurden Stadienzuordnungen im Sinne Piagets und Brainerds abgeleitet. Für die Klassifikation nach Piaget wurden neben den kognitiven Urteilen des Kindes stets auch die Erklärungen herangezogen. Das Kind muß in mindestens einer Teilaufgabe die transitive Beziehung anschaulich beschreiben. Für die Kodierung nach Brainerd wurden nur die Zahl der korrekten Urteile des Kindes herangezogen.

Tabelle 20 zeigt die Stadienzuordnungen für die drei Altersgruppen. Kinder mit 6 Jahren sind fast nur den Stadien 2 und 3 zugeordnet, d. h. Kinder dieses Alters lösen die wichtigsten Bestandteile der Aufgabe (die Mehrzahl der Einzelvergleiche und mindestens eine Aufgabe zur Transitivität).

Tabelle 20

Altersentwicklung bei der Ordinationsaufgabe
(nach zwei verschiedenartigen Stadienkriterien)
(Angaben in Prozent)

		<u>Altersgruppe</u>		
		4	5	6
Stadium	1	P 41,7 B 41,7	P 17,7 B 21,6	P 9,8 B 9,8
	2	P 55,6 B 41,7	P 70,6 B 51,0	P 68,6 B 43,1
	3	P 2,8 B 16,7	P 11,8 B 27,5	P 21,6 B 47,1
		P = Piaget B = Brainerd		

Eine dichotome Kodierung der Stadien (Stadium 3 = 1) verdeutlicht sowohl die Altersunterschiede als auch die erhebliche Diskrepanz zwischen den beiden gewählten Stadienzuordnungen. Mindestens doppelt so viele Kinder werden den Stadien Brainerds zugeordnet als den Stadien Piagets (Tabelle 21).

Tabelle 21

Dichotome Kodierungen der Ordinationsaufgabe

Alter	4		5		6	
	Piaget	Brainerd	Piaget	Brainerd	Piaget	Brainerd
Stadien						
0	97,2	83,3	88,2	72,6	76,5	52,9
1	2,8	16,7	11,8	27,5	23,5	47,1

Brainerd Stadien: $\chi^2 = 15,62$, $df = 2$, $p < 0.001$

Piaget Stadien: $\chi^2 = 17,06$, $df = 2$, $p < 0.001$

Traditionelle Seriationsaufgabe

Für die Beurteilung der Seriationsaufgabe wurden sowohl die Anzahl richtig aufgereihter Stäbe (insgesamt 7) als auch die Zahl korrekt eingefügter Stäbe berücksichtigt. Das Aufreihen der Stäbe ist für die vierjährigen Kinder eine überaus schwierige Aufgabe, denn nur 11 % der Kinder schaffen es, alle sieben Stäbe korrekt aufzureihen; daneben findet sich kein vierjähriges Kind, dem es gelingt, zwei weitere Stäbe in die fertige Anordnung von Stäben einzufügen. Bei den 5-jährigen legen 33,3 % die Stäbe korrekt und 15,7 % der Kinder fügen zwei weitere Stäbe korrekt ein; im Alter von sechs Jahren werden von 70,6 % der Kinder alle Stäbe korrekt aufgereiht und 43,1 % der Kinder fügen die weiteren Stäbe ein ($\chi^2 = 47,1$ (Aufreihen der Stäbe), $df = 2$, $p < 0.0001$).

Bei den spontanen Erklärungen der Kinder geben 89 % der jüngsten Kinder keine Antwort auf die Frage, wie sie die Stäbe einfügen könnten. Dies ist leicht verständlich, da die Aufgabe, Stäbe einzufügen, für das Kind fast unlösbar ist. Ein Hinweis auf den Vergleich mit Nachbarstäben, anhand derer das Kind den Stab an die richtige Stelle in der Anordnung einfügen kann, geben nur die 6-jährigen häufiger (4 J. 0 %, 5 J. 5,9 %, 6 J. 31,4 %). Viele Erklärungen des Kindes sind unspezifisch für die Lösung und beschreiben etwa ein zufälliges Zusammentreffen ("das paßt da hin, ich hab's gefunden, ich hab's so hingelegt und jetzt stimmt's") oder den allgemeinen Meßvorgang ("ich hab die Stäbe zusammengelegt, ich hab gemessen"). Einige Kinder lesen die Richtigkeit der Lösung auch an der Treppenform ab, die die oberen Enden des Stabes bilden.

Die Antworten der Kinder wurden nach zwei verschiedenen Stadienkriterien kodiert (vgl. Kodierungsschema). Bei den quantitativen Stadien wurde nur die Zahl der korrekt gelegten Stäbe miteinbezogen, bei der Kodierung nach Piaget zusätzlich noch die Erklärung des Kindes. Vergleicht man die Ergebnisse für die drei Altersgruppen, so sieht man erneut, welche großen Unterschiede durch verschiedenartige Stadienkriterien zustandekommen. Bei den qualitativen Stadien werden 8,3 % (4 J.), 37,3 % (5 J.) und 66,7 % (6 J.) der Kinder Stadium 3 zugeordnet ($\chi^2 = 45,5$, $df = 2$, $p < 0.001$), für die Klassifikation nach Piaget erfüllen nur 5,8 % (5 J.) und 29,4 % (6 J.) die Voraussetzungen. Im letzten Fall wird eine angemessene Erklärung des Kindes, nämlich eine Beschreibung des Abmessens an den Nachbarstäben, verlangt. Bei der traditionellen Seriationsaufgabe ergibt die Kodierung nach Piaget also eine sehr konservative Schätzung der möglichen Leistungen des Kindes.

Stabaufgabe (Einfügen von Stäben in ein aufgereihtes Muster):

Die Stabaufgabe dient dazu, zu beobachten, auf welche Weise ein Kind einen Stab (aus mehreren anderen) auswählt, um ihn an eine bestimmte Stelle in einer aufgereihten Anordnung von Stäben einzufügen. Die korrekten Antworten der Altersgruppen verdeutlichen die Schwierigkeiten, die die jüngeren Kinder mit der Aufgabe haben. 30,6 % (4 J.), 54,9 % (5 J.), 70,6 % (6 J.) der Kinder finden beide Stäbe ($\chi^2 = 15,6$, $df = 2$, $p < 0.001$). Bei den Vierjährigen beobachtet man sehr häufig, wie sie einen der

vorgelegten Stäbe völlig beliebig auswählen und in die Anordnung einfügen (86 % bzw. 92 % nehmen beim 1. bzw. 2. Durchgang keine Vergleiche zu Nachbarstäben vor). Auch die zusätzliche Hilfestellung, die der Versuchsleiter dann wählte, (1) wenn das Kind den Stab in die Anordnung einfügte, ohne auf untere und obere Ränder zu achten (z.B. der Stab schließt unten nicht ab, sondern steht einige Zentimeter über), ergibt bei den jüngsten Kindern keine wesentliche Verringerung der Fehlerhäufigkeit (etwa 10 % bezogen auf beide Durchgänge). Bei den Kindern mit 5 und 6 Jahren spielen die Hilfestellungen fast keine Rolle.

Erstaunlich ist, wie selten Kinder systematische Vergleiche zu Nachbarstäben vornehmen. Ungenaueres Abmessen an den Nachbarstäben findet man bei den 4-jährigen Kindern sehr selten (etwa 10 % der Kinder in beiden Durchgängen), aber auch bei den anderen Altersgruppen ist diese Strategie selten (unter 15 %). Viele Kinder verlassen sich offenbar auf den räumlichen Eindruck ("es sieht aus wie eine Treppe") oder schätzen ab, welche absolute Größe der Stab haben muß und wählen danach aus. Systematisches Abmessen an Nachbarstäben finden sich nur zu 5 % bei den Kindern mit 5 Jahren und 9 % bei den 6-jährigen.

Bei der Definition von qualitativen Stufen für diese Aufgabe werden solche Vergleichsstrategien herangezogen. Daher ist es nicht erstaunlich, daß nur 5 % der Kinder in der untersuchten Gruppe Stufe 3 der Stabaufgabe erreichten. Zieht man zusätzlich die sprachlichen Hinweise des Kindes hinzu, es habe am danebenliegenden Stab abgemessen, erhalten immerhin 13,9 % der Kinder das Niveau 3 (vgl. ähnliche Ergebnisse bei Moore, 1979).

(1) Instruktion: "Ja der Stab paßt auch dahin, aber ich hab vorhin einen anderen gezeigt. Kannst du nochmal das richtige Stäbchen suchen".

3.2. Entwicklungsbeziehungen zwischen den Ordinationsaufgaben

Die Entwicklungsbeziehungen zwischen drei der Ordinationsaufgaben sind von besonderem Interesse, weil sie alle Indizien für das Verständnis des Kindes für eine transitive Beziehung abgeben. Dazu gehört die eigentliche Ordinationsaufgabe nach Brainerd, Piagets Seriationsaufgabe und die Aufgabe zum Einfügen von Stäben. Um die Entwicklungsbeziehungen dieser drei Aufgaben zu untersuchen, wurden jeweils Stadienkriterien festgelegt, die Ausdruck unterschiedlichen qualitativen Verständnisses des Kindes für die Aufgabe sein können.

Zunächst zur Wechselbeziehung zwischen Ordinationsaufgabe und Seriationsaufgabe. Die Seriationsaufgabe wurde zunächst im Sinne der Stadienkriterien Piagets kodiert und dann in einer Kontingenztafel mit den Stufen der Ordinationsaufgabe nach Piaget bzw. Brainerd angeordnet. Vergleicht man die Ordinationsaufgabe nach Brainerd mit Piagets traditioneller Seriationsaufgabe, läßt sich die zu vermutende Entwicklungspriorität der Ordinationsaufgabe mit Hilfe der Vorhersageanalyse gut absichern (Tabelle 22). Die Ordinationsaufgabe erfordert vom Kind im Grunde die Konstruktion einer systematischen räumlichen Beziehung zwischen den drei Stäben, und es wird keine Lösungsbeschreibung im Sinne der Transitivität erwartet. Auch ist es möglich, daß einzelne Kinder eine einfachere Lösungsmethode für die Ordinationsaufgabe entwickeln (z.B. sie merken sich das absolute Gewicht bzw. die absolute Länge des schwersten bzw. längsten Gegenstands und messen daran das Vergleichsobjekt ab), so daß hier auch eine weniger komplexe kognitive Leistung zum Ziel führt (vgl. Fischer, 1980, "mimicking", S. 516-517). Dagegen erfordert die Lösung der Seriationsaufgabe im Sinne Piagets nicht nur das systematische Abmessen an den Nachbarstäben, sondern auch eine Beschreibung dieser Lösungsstrategie.

Tabelle 22

Entwicklungsbeziehung zwischen
Seriations- und Ordinationsaufgabe

Seriation von Stäben
(Kodierung nach Piaget)

Entwicklungspriorität
der Ordinationsaufgabe

Ordinations-
aufgabe
(Kodierung
nach
Brainerd)

	1	2	3
1	20	8	1
2	31	27	5
3	15	18	11

$$\begin{aligned} V_p &= 0,386 \\ U &= 0,168 \\ z &= 3,118 \\ p &< 0.001 \end{aligned}$$

N = 136

Wählt man für beide Aufgaben eine identische Kodierung, einmal nach Piaget, das andere Mal nach Brainerd, ergeben sich wieder etwas andere Aspekte in der Beziehung zwischen den Aufgaben. Werden beide Aufgaben nach Piaget kodiert, lassen sich in der Kontingenztafel sowohl ein Modell paralleler Entwicklung (Modell I, Tabelle 23) als auch ein Modell, das die Wechselbeziehung beider Aufgaben voraussetzt (Modell II, Tabelle 23), erkennen. Das letzte Modell erhält dabei den Vorzug, weil der U-Wert wesentlich größer ist, d.h. die Vorhersage sich auf einen größeren Erwartungsanteil der Tabelle erstreckt. Werden beide Kodierungen der Variablen nur nach den kognitiven Urteilen der Kinder bzw. dem beobachtbaren Verhalten vorgenommen, läßt sich ebenfalls eine Wechselbeziehung zwischen Seriation und Ordination in der Entwicklung belegen (Tabelle 24).

Tabelle 23

Entwicklungsbeziehungen zwischen
Seriationsaufgabe und Ordinationsaufgabe

Ordinations-
aufgabe
(Kodierung
nach Brainerd)

Seriation
(Kodierung nach Piaget)

	1	2	3
1	20	7	1
2	45	38	8
3	2	8	8

N = 136

Modell I
parallele
Entwicklung

$$V_p = 0,756$$

$$U = 0,09$$

$$z = 5,61$$

$$p < 0.0001$$

Modell II
Wechselbeziehung
in der Entwick-
lung

$$V_p = 0,401$$

$$U = 0,219$$

$$z = 4,061$$

$$p < 0.0001$$

Tabelle 24

Wechselbeziehung zwischen Seriation und
Ordination (bei vergleichbaren Aufgabenkriterien)

Ordination
(Kodierung nach Brainerd)

Seriation
(Kodierung
nach
quantitativen
Kriterien)

	1	2	3
1	19	25	12
2	5	13	7
3	5	25	25

N = 136

Modell I
Wechselbe-
ziehung der
beiden Aufgaben

$$V_p = 0,330$$

$$U = 0,318$$

$$z = 3,65$$

$$p < 0.0005$$

Bei Stabaufgaben (Einfügen von Stäben) wird in die Kodierung des Kindes die beobachtbare Lösungsmethode bzw. die Beschreibung des Kindes für seine Lösungsmethode einbezogen. Die Stabaufgabe mißt daher ein erweitertes Verständnis des Kindes für die transitive Beziehung ab. Das zeigt sich an der Verteilung der Stabaufgabe selbst: Stadium 3, in dem ein Kind mindestens einen systematischen Vergleich mit einem Nachbarstab oder aber mit beiden Nachbarstäben vornehmen muß, erreichen nur 5 % der Kinder aus der gesamten Stichprobe. Diese Verteilung der Stadienniveaus erschwert es auch, die Entwicklungsbeziehung zu anderen Ordinationsaufgaben präziser zu prüfen. So zeigt die Untersuchung der Beziehung zu der Ordinationsaufgabe, die nach Piaget kodiert wurde, daß die Ordination für die Kinder wesentlich leichter ist ($V_p = 0,20$, $p < 0,05$), die Kontingenztafel ist aufgrund der Verteilung der Niveaus der Stabaufgabe aber nicht aussagekräftig. Der Vollständigkeit halber wird noch die Kontingenztafel mit Brainerds Ordinationsaufgabe angeführt, die auch nur die kognitiven Urteile des Kindes betrachtet. An dieser Tabelle sieht man, daß die Ordinationsaufgabe den Kindern bedeutend leichter fällt (dies bestätigt auch schon die Anzahl der Lösungen, die Kindern jeden Alters finden, vgl. Beschreibung der einzelnen Ordinationsaufgaben). (Tabelle 25)

Tabelle 25

Entwicklungsbeziehung zwischen Ordinations- und Stabaufgabe

Ordinationsaufgabe (Brainerd)

Stabaufgabe
(Einfügen von
Stäben)
(Kodierung
nach den Ver-
gleichs-
strategien)

	1	2	3
1	22	36	17
2	8	23	24
3	0	4	3

$N = 137$

Entwicklungs-
priorität
der Ordinations-
aufgabe

$$V_p = 0,286$$

$$U = 0,123$$

$$z = 1,93$$

$$p < 0.05$$

Schließlich sollen kurz die Ergebnisse bei der Treppenaufgabe erörtert werden. Diese Aufgabe hat nur den Kindern mit 5 und 6 Jahren vorgelegen. Die Treppenaufgabe prüft die Fähigkeit des Kindes, die ordinalen und kardinalen Aspekte innerhalb einer Aufgabe zu koordinieren. Entgegen den Erwartungen aus anderen Untersuchungen (z.B. Henry, 1976), finden sich fast keine Kinder, die die Anzahl der Treppen noch korrekt abzählen konnten, nachdem sie einmal vermischt waren. Die Kinder achten bei den vermischten Treppen vielmehr vorwiegend auf die ordinale Position der Treppen und zählen die durcheinandergemischten Treppen so der Reihe nach ab. Stadium 3 der Treppenaufgabe, das das korrekte Zählen losgelöst von der ordinalen Position einschließt, erreichen in den untersuchten Altersgruppen nur (bei den 5-jährigen) bzw. 3 Kinder (bei den 6-jährigen). Diese Ergebnisse sprechen dafür, daß diese Aufgabenstellung für Kinder diesen Alters überaus verwirrend ist; die Instruktion, an die Position der Treppe zu denken, so wie sie vorher - nämlich vor dem Vermischen - ausgesehen hat, verstehen die meisten Kinder mit 5 und 6 Jahren nicht. (Die Ergebnisse von Henry (1976) zeigen übrigens auch einen relativ niedrigen Lösungsanteil für die Kindergartenkinder, wenn die Kinder mit vermischten Treppen arbeiten müssen. Die Ergebnisse sind aber nicht sehr informativ berichtet, so daß nicht abgeschätzt werden kann, wieviele Kinder in der untersuchten Gruppe überhaupt eine Lösung finden.)

Tabelle 26

Stadienzuordnung der Treppenaufgabe

	Altersgruppe	5	6
Stadienzuordnung			
1		64,7	52,9
2		33,3	41,2
3		2,0	5,9

(Angaben in Prozent)

Die Analyse der Entwicklungsbeziehungen zwischen der Treppenaufgabe und anderen Ordnungsaufgaben zeigt, daß die Treppenaufgabe schon aufgrund der Häufigkeitsverteilung innerhalb der Stadien wesentlich schwieriger als die Vergleichsaufgaben ist. Die Vorhersageanalyse der Kontingenztabellen dieser Vergleiche sind jedoch nicht besonders informativ, gerade weil das Stadium 3 der Treppenaufgabe so selten ist. Auf eine detailliertere Darstellung wird hier deshalb verzichtet.

Die Vorhersage der ordinalen Theorie, das Kind könne mit der ordinalen Position der Treppen leichter umgehen als mit dem kardinalen Aspekt, wird durch die Ergebnisse bestätigt. Vermutlich ist das aber nicht eine Folge der größeren Schwierigkeit der Kardination (auf Aufforderung können die älteren Kinder die relative Anzahl der Treppenstufen zählen), sondern entsteht durch die Wahrnehmungsunterstützung der Ordination. Das Kind identifiziert die ordinale Position der Treppe mit der systematisch seriierten Ordnung.

3.3. Guttman-Skalierung der Ordinationsaufgaben:

In die Skalierung der Ordinationsaufgaben gehen die Stabaufgabe, die Ordinationsaufgabe (repräsentiert durch zwei Stadiendefinitionen), die Seriation der Zahlen, die traditionelle Serieationsaufgabe, die Aufgabe zur Identifikation einzelner Elemente und die Treppenaufgabe ein. Obwohl die Schwierigkeit der Aufgaben eine relativ konsistente Reihenfolge zeigt, die auch zu dem Reproduzierbarkeitskoeffizienten paßt ($C_R = 0,903$, Green's Skalierbarkeitskoeffizient $0,48$), zeigen detaillierte Analysen der Aufgaben eine gewisse Variabilität in der Rangfolge der Aufgaben, die vor allem in der Altersgruppe der 5-jährigen Kinder zum tragen kommt (C_R für das Alter 5: $C_R = 0,89$, Skalierbarkeitskoeffizient $Sc = 0,35$). Dagegen ist in der Gruppe der 4-jährigen die Skalierbarkeit der Items sehr hoch ($C_R = 0,88$, Sc (Green) = $0,67$), was einerseits durch die sehr systematische Abfolge der Aufgaben: Identifikation eines Elements in der seriierten Anordnung →

Zahlenserialation → Ordinationsaufgabe zustande kommt, andererseits natürlich dadurch, daß die schwierigsten Aufgaben (Treppenaufgabe und Stabaufgabe) von Kindern diesen Alters kaum gelöst werden.

Tabelle 27

Schwierigkeitsabfolge der Ordinationsaufgaben
(N = 138)

+ Serialation der Zahlen	
+ Identifikation einzelner Elemente in der Serialationsaufgabe	
+ Ordinationsaufgabe (Brainerd)	
+ Serialation (Piaget)	
+ Ordinationsaufgabe (Piaget)	
+ Stabaufgabe (Vergleichsstrategien)	
+ Treppenaufgabe	

Koeffizient der Reproduzierbarkeit	0,903
Skalierbarkeitskoeffizient (Green)	0,484

Die Abfolge in der Tabelle 27 darf nicht als normative Beschreibung des Entwicklungsverlaufs übernommen werden; denn sehr spezifische Aufgabenfaktoren für eine bestimmte Aufgabe können deren relative Rangfolge erheblich mitbeeinflussen. Auch führen veränderte Stadienkriterien bei der Stabaufgabe bzw. der Serialationsaufgabe (nach quantitativen Kriterien) zu einer Verschiebung der Schwierigkeitsabfolge der Aufgabe. Man sollte daher eine solche Anordnung mit Vorbehalt betrachten. Eine Schwierigkeitsrangfolge ist nur ein erster Schritt zur Formulierung genauerer Hypothesen, weshalb eine bestimmte Klasse von Aufgaben vor einer anderen gelöst wird.

4. Entwicklungsbeziehungen zwischen Zahlinvarianzaufgabe und Ordinationsaufgaben /Seriationsaufgaben

Die Untersuchung der Entwicklungsbeziehung zwischen Zahlinvarianzaufgabe und Ordinationsaufgabe ist für die Überprüfung der ordinalen Theorie der Zahlentwicklung von großer Bedeutung. Die Zahlinvarianzaufgabe selbst ist ein relativ konservativer Indikator der Zahlbegriffsentwicklung verglichen zum Beispiel mit arithmetischen Fertigkeiten des Kindes (vgl. Brainerd und Fraser, 1975; Saxe, 1979). Da die Aufgaben in der vorliegenden Untersuchung nach alternativen Reaktionskriterien kodiert wurden, einmal nach Brainerds Position, zum anderen nach der Piagets, ist es von Interessen, den Einfluß der Stadienkriterien auf die zu untersuchende Entwicklungsbeziehung zu prüfen.

Zunächst werden die Vergleiche zwischen Ordinations- und Zahlinvarianzaufgabe bei theoretisch konsistenten Kriterien diskutiert. Die Auswertung nach den Stadiendefinitionen von Piaget liefert einen relativ kleinen Anteil von Kindern im Stadium 3, da die Kinder in der untersuchten Kindergartengruppe angemessene Erklärungen seltener gaben. Diese Beobachtung stimmt aber mit den Erfahrungen in der Piagetforschung hinsichtlich der Stadienkodierung (Vergleich zwischen Urteil vs. Urteil + Erklärung) überein (Brainerd, 1973 b).

Die vorhergesagte Entwicklungspriorität der Ordinationsaufgabe bestätigt sich bei der Auswertung beider Aufgaben nach den Stadienkriterien Piagets relativ gut. Dabei sollte man aber beachten, daß auch das Stadium 3 der Ordinationsaufgabe relativ selten von den Kindern erreicht wird (von etwa 13 %) (s. Tabelle 27).

Tabelle 28

Entwicklungsbeziehung zwischen Zahlinvarianz
und Ordinationsaufgabe (Kodierung nach Piaget)

Zahlinvarianzaufgabe
(Stadien nach Piaget)

Ordinations-
aufgabe
(Kodierung
nach Piaget)

	1	2	3
1	24	3	2
2	63	18	10
3	4	6	8

N = 138

Entwicklungs-
priorität
der Ordination

$$V_p = 0,349$$

$$U = 0,167$$

$$z = 2,67$$

$$p < 0.005$$

Tabelle 29

Kontingenztafel Ordinationsaufgabe und
Zahlinvarianz (Kodierung nach Brainerd)

Zahlinvarianzaufgabe
(Kodierung nach Brainerd)

Ordinations-
aufgabe
(Kodierung
nach
Brainerd)

	1	2	3
1	25	0	5
2	44	3	16
3	21	1	22

N = 137.

Entwicklungs-
priorität
der Ordination

$$V_p = 0,297$$

$$U = 0,216$$

$$z = 3,149$$

$$p < 0.001$$

Ein vergleichbares Ergebnis ergibt sich, wenn man die beiden Aufgaben vergleicht, nachdem sie mittels der Kriterien von Brainerd kodiert wurden. Hier sind bei beiden Aufgaben auch die Stadien 3 häufiger vertreten (32 % der Kinder erfüllen Stadium 3 bei der Ordination und 29 % bei der Zahlinvarianz). Allerdings ist es eine Eigenart der Kodierung nach Brainerd, daß Stadium 2 der Zahlinvarianzaufgabe relativ selten ist (nur 3 % der Kinder), was aus der hohen Konsistenz in den Urteilen der Kinder erklärt werden kann. Sieht man von diesen Einschränkungen ab, bestätigt sich erneut die Entwicklungspriorität des Ordinationskonzepts (s. Tabelle 29). Der V_p -Wert ist allerdings nicht allzu hoch, d. h. die Vorhersage ist nicht vollständig zufriedenstellend, wenn man von den strengen Hypothesen der ordinalen Theorie ausgeht (vgl. Froman und Hubert, 1980, zu Vergleichswerten). Es fällt allerdings auf, daß immerhin fast 12 % der Kinder das Stadium 3 der Zahlinvarianz erreichen, die in der Ordination nur Stadium 2 einnehmen. Dies ist insofern erstaunlich, als bei der Ordinationsaufgabe eher die Möglichkeit besteht, daß das Kind eine operationale Lösung "vortäuscht" (im positiven Sinn), z.B. wenn es sich das absolute Gewicht oder die absolute Länge eines der drei zu vergleichenden Elemente merkt.

Anders sehen die Ergebnisse aus, wenn man die Stadienkriterien der beiden Aufgaben miteinander variiert. Die Wechselbeziehung zwischen der Zahlinvarianzaufgabe, kodiert nach Piaget, und der Ordinationsaufgabe, kodiert nach Brainerd, liefert kein so eindeutiges Bild. Die Priorität der Ordination ist hier zwar anschaulich gegeben (und wäre sicherlich mit Brainerds ordinaler Analyse abzusichern, z.B. Brainerd, 1974), aber die Vorhersageanalyse stützt bei der vorliegenden Stichprobe dieses Ergebnis nicht. (Tabelle 30)

Schließlich ergibt sich bei der Prüfung der Beziehung der Zahl-invarianzaufgabe kodiert nach Brainerd (also nur gestützt auf die kognitiven Urteile des Kindes) ein wesentlich verändertes Bild. Während die Entwicklungspriorität des Ordinationskonzepts hier nicht abzusichern ist, erfüllt ein zweites Modell, das eine synchrone Entwicklung bzw. eine Wechselbeziehung beider Aufgaben vorhersagt, die Voraussetzungen (siehe Modell II in Tabelle 31). Hier wirkt sich offensichtlich aus, daß die Kodierung der Ordinationsaufgabe nach Piaget eher konservativ ist (nur 13 % der Kinder fallen in Stadium 3 der Ordinationsaufgabe).

Auch kann eine weitere Variation der Aufgabe zur Verdeutlichung dieser Ergebnisse betrachtet werden. Für die Entwicklungsbeziehung zwischen der qualitativen Korrespondenzaufgabe, die als eine besondere Form der Zahlinvarianz durchgeführt wurde, und die Ordinationsaufgabe, ergibt sich eine Unterstützung des Modells, wenn die Ordinationsaufgabe nach Brainerd kodiert wird (Tabelle 32). Wird dagegen die Kodierung nach Piaget betrachtet, ist auch das Modell einer Wechselbeziehung zwischen beiden Aufgaben statistisch abzusichern (Modell II in Tabelle 32). Für die Aufgabe zur qualitativen Korrespondenz wurde keine Kodierung nach Brainerd vorgenommen.

Tabelle 30

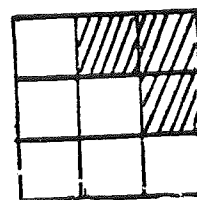
Prüfung der Entwicklungspriorität der Ordinationsaufgabe gegenüber der Zahlinvarianz (alternative Kriterien)

Zahlinvarianzaufgabe
(Kodierung nach Piaget)

Ordinations-
aufgabe
(Kodierung
nach
Brainerd)

	1	2	3
1	25	3	2
2	44	8	11
3	21	16	7

N = 137



$$\begin{aligned} V_p &= 0,173 \\ U &= 0,140 \\ z &= 1,33 \\ p &> 0.05 \end{aligned}$$

Tabelle 31

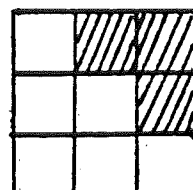
Prüfung der Entwicklungsbeziehungen zwischen Zahlinvarianzaufgabe und Ordinationsaufgabe (alternative Kriterien)

Zahlinvarianzaufgabe
(Kodierung nach Brainerd)

Ordinations-
aufgabe
(Kodierung
nach
Piaget)

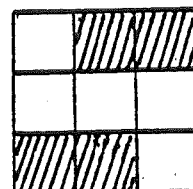
	1	2	3
1	24	0	5
2	63	4	24
3	4	0	14

N = 138



Modell I: Entwicklungspriorität der Ordinationsaufgabe

$$\begin{aligned} V_p &= -0,023 \\ U &= 0,205 \\ z &= 0,168 \\ p &> 0.5 \end{aligned}$$



Modell II: Wechsel-
beziehung in der
Entwicklung beider
Aufgaben

$$\begin{aligned} V_p &= 0,596 \\ U &= 0,161 \\ z &= 4,87 \\ p &< 0.001 \end{aligned}$$

Tabelle 32

Prüfung der vorhergesagten Entwicklungspriorität der Ordinationsaufgabe gegenüber der Zahlinvarianzaufgabe (qualitative Korrespondenz)

Zahlinvarianz/qualitative Korrespondenz
(Kodierung nach Piaget)

Ordination
(Kodierung
nach
Brainerd)

	1	2	3
1	25	2	3
2	46	2	15
3	22	5	17

N = 137

$$V_p = 0,2232$$

$$U = 0,188$$

$$z = 1,854$$

$$p < 0.05$$

Zahlinvarianz/qualitative Korrespondenz
(Kodierung nach Piaget)

Ordination
(Kodierung
nach
Piaget)

	1	2	3
1	24	2	3
2	66	7	18
3	4	0	14

N = 138

Modell I: Entwicklungspriorität der Ordination

$$V_p = 0,289$$

$$U = 0,234$$

$$z = 4,69$$

$$p < 0.001$$

Modell II: Wechselbeziehung beider Aufgaben

$$V_p = 0,603$$

$$U = 0,164$$

$$z = 4,95$$

$$p < 0.001$$

Zwar ist es theoretisch sinnvoll, für den Vergleich von kognitiven Entwicklungsaufgaben ähnliche Kriterien zu verwenden, aber es ist keineswegs geklärt, welche unterschiedlichen Lösungsprozesse bzw. welches unterschiedliche Verständnis einer Aufgabe durch verschiedenartige Urteils- bzw. Auswertungskriterien erfaßt werden. Hier liegt auch eine entscheidende Schwäche in der Argumentation Brainerds, man müsse sich vor allem auf die Urteile von Kindern stützen (vgl. Brainerd, 1973 b; Brainerd und Hooper, 1975, 1978; S. A. Miller, 1978). Bei den Ordinations-/Seriationsaufgaben zeigt sich in der vorliegenden Untersuchung, daß die Erklärungen des Kindes in Verbindung mit richtigen kognitiven Urteilen des Kindes zwar eine relativ konservative Schätzung der Fähigkeiten des Kindes in dieser Aufgabe ergeben, aber es liegt die Vermutung nahe, daß Kinder, die die Lösungsprozedur in der Ordinationsaufgabe (nämlich der Transitivität) oder der Seriation (nämlich systematische Vergleichsoperationen) erklären können, ein erweitertes Verständnis der Aufgabe haben als Kinder, bei denen nur die kognitiven Urteile richtig sind (s. dazu die Untersuchung von Moore, 1979). Mit einem Wort: Entwicklungsbeziehungen zwischen kognitiven Aufgaben müssen auf verschiedenen Ebenen mit unterschiedlichen Aufgaben- und Auswertungskriterien abgesichert werden. Verändert sich die behauptete Entwicklungsbeziehung infolge eines veränderten Kriteriums, ist dies eher eine Anregung zu neuartigen Hypothesen über die kindlichen Lösungsprozesse.

Was läßt sich aus diesen Ergebnissen folgern? Die Untersuchung von Entwicklungsbeziehungen zwischen verschiedenen kognitiven Aufgaben ist von verschiedenen Faktoren abhängig, dazu gehört die Auswahl der Stichprobe und deren Altersverteilung (z. B. Gonchar, 1975), die speziellen Beurteilungskriterien der Aufgabe, die in Abhängigkeit von der jeweiligen Theorie Anwendung finden, und schließlich die Gestaltung der Aufgabe selbst (z.B. der Grad an Reizunterstützung in der Zahlinvarianzaufgabe). Da die ordinale Theorie voraussetzt, daß das Kind für das Verständnis des Zahlbegriffs ein systematisches Verständnis von Ordnungsbeziehungen haben muß, insbesondere der Transitivität zwischen drei beliebigen Elementen, schränken einige Resultate der vorliegenden

Untersuchung die ordinale Theorie in ihrer Gültigkeit ein. Zwar unterstützen diejenigen Ergebnisse die ordinale Theorie in denen Kodierungen der Aufgaben nach Brainerd vorgenommen wurden, aber es läßt sich leicht argumentieren, daß ein logisches Verständnis der Ordnungsbeziehung (und darum geht es ja im Rahmen der ordinalen Theorie) zumindest zum Teil durch angemessene Erklärungen des Kindes angezeigt wird. Letztlich fehlt ein systematisches Lösungsmodell der Ordinationsaufgabe oder allgemeiner von Seriationsaufgaben, das explizit formuliert, welche Lösungsprozeduren das Kind innerhalb dieser Aufgabe beherrscht, die dann als Vorbedingungen des Zahlbegriffs, also beispielsweise der Zahlinvarianzaufgabe, herangezogen werden könnten (vgl. zur Übersicht die Literatur zur Transitivität, Thayer und Collyer, 1978).

Die Hypothesen der ordinalen Theorie zur Entstehung des Zahlbegriffs kann man weiter prüfen, wenn man untersucht, wieviele Kinder die Seriationsaufgabe (nach Piaget) und die Stabaufgabe (Einfügen von Stäben) im Verhältnis zur Zahlinvarianz beherrschen. In beide Aufgaben geht nämlich ein implizites Verständnis transitiver Beziehungen ein, die sich bei der Seriationsaufgabe beim Einfügen neuer Stäbe in eine bereits geordnete Folge von Stäben und in der Stabaufgabe an den Vergleichsstrategien zu Nachbarstäben offenbart.

Bei der Zahlinvarianzaufgabe nach Piaget läßt sich zwar mit beiden Kodierungsschemata der Seriationsaufgabe belegen, daß die Seriation der Zahlinvarianz in der Entwicklung vorausgehen dürfte, für die Stadiendefinition nach Piaget bei der Seriation erhält aber ein Modell, das die Wechselbeziehung beider Aufgaben behauptet, eine bessere Absicherung als jenes der Entwicklungspriorität der Seriation (Tabelle 33, Modell II).

Für die Stadien der Zahlinvarianz nach Brainerd, in die nur die kognitiven Urteile des Kindes eingehen, läßt sich zu beiden Auswertungen der Seriation eine Wechselbeziehung zwischen beiden Aufgaben in der Entwicklung belegen. Zwar erhält in der Kontingenztafel zwischen Zahlinvarianz (Brainerd) und Seriation (quantitative Kriterien) auch ein Modell der Entwicklungspriorität

der Seriation gute Unterstützung, aber Modell II erreicht einen wesentlich höheren U-Wert, d.h. die Vorhersage erstreckt sich auf einen größeren Erwartungsbereich der Kontingenztabelle und sie erhält daher den Vorzug (Tabelle 34, Modell II).

Tabelle 33

Zahlinvarianzaufgabe in Beziehung zur
Seriationsaufgabe

Zahlinvarianzaufgabe (Stadien nach Piaget)

		1	2	3
Seriation von Stäben (Stadien nach quanti- tativen Kriterien)	1	46	8	3
	2	18	5	2
	3	26	14	15

N = 137

Modell I

Seriation geht
der Zahlinva-
rianz voraus

$$V_p = 0,44$$

$$U = 0,169$$

$$z = 4,4$$

$$p < 0.001$$

Zahlinvarianzaufgabe
(Stadien nach Piaget)

		1	2	3
Seriation von Stäben (Stadien nach Piaget)	1	54	10	3
	2	29	12	12
	3	3	12	5

N = 137

Modell I

Seriation geht
der Zahlinva-
rianz voraus

$$V_p = 0,180$$

$$U = 0,221$$

$$z = 1,91$$

$$p < 0.05$$

Modell II

Wechselbeziehung
beider Aufgaben

$$V_p = 0,333$$

$$U = 0,274$$

$$z = 4,02$$

$$p < 0.001$$

Tabelle 34 Zahlinvarianzaufgabe nach Brainerd in Beziehung zu Seriationsaufgaben

Zahlinvarianzaufgabe
(Stadien nach Brainerd)

	1	2	3
Seria- 1 tion von Stäben (quantita- tati- 2 ve Kri- terien für Seria- 3 tion	46	0	11
	18	2	5
	26	2	27
N = 137			

Modell I: Seriation
geht der Zahlin-
varianz voraus

$$V_p = 0,412$$

$$U = 0,197$$

$$z = 3,98$$

$$p < 0.001$$

Modell II: Wechsel-
beziehung beider
Aufgaben

$$V_p = 0,318$$

$$U = 0,414$$

$$z = 3,71$$

$$p < 0.001$$

Zahlinvarianzaufgabe
(Stadien nach Brainerd)

	1	2	3
Seria- 1 tion (Stadien von Piaget) 2	54	1	12
	29	3	21
3	7	0	10
N = 137			

Modell I: Wechsel-
beziehung beider
Aufgaben

$$V_p = 0,415$$

$$U = 0,249$$

$$z = 3,85$$

$$p < 0.001$$

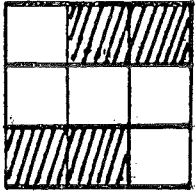
Schließlich läßt sich bei der Stabaufgabe, in der explizit beobachtet wird, welche (Meß)Vergleiche das Kind zu den Nachbarstäben vornimmt, für beide Kodierungen der Zahlinvarianzaufgabe eine wechselseitige Entfaltung beider Aufgaben (Stabseriation und Zahlinvarianz) vermuten (vgl. Tabellen 35/36).

Die Stabaufgabe, in die die Erklärung des Kindes miteingeht, unterstützt dieses Modell dabei besser, offenbar, weil die Verteilung der Marginalien (vgl. Niveau 3 der Stabaufgabe) günstiger für eine Entwicklungsvorhersage ist.

Die nachfolgende Tabelle stellt die beobachteten Entwicklungsbeziehungen für die Ordinationsaufgaben zur Zahlinvarianz bei Verwendung alternativer Kriterien zusammen. Der Vollständigkeit halber muß noch angemerkt werden, daß die Beziehung zwischen Zahlinvarianz- und Treppenaufgabe nicht näher interpretiert wird, da das Niveau 3 der Treppenaufgabe in der untersuchten Altersgruppe so selten vorkommt, daß die Prüfung einer systematischen Wechselwirkung in der Entwicklung nicht zulässig erscheint (Tabelle 37).

Tabelle 35

Zahlinvarianzaufgabe nach Brainerd
in Beziehung zur Stabaufgabe

		Zahlinvarianz (Stadien nach Brainerd)			
		1	2	3	
Stabaufgabe (Kriterien nach Vergleichs- strategie)	1	59	2	15	 Wechselbeziehung der Aufgaben $V_p = 0,283$ $U = 0,222$ $z = 2,49$ $p < 0.01$
	2	28	1	26	
	3	4	1	2	
		N = 138			

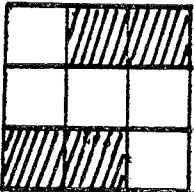
		Zahlinvarianz (Stadien nach Brainerd)			
		1	2	3	
Stabaufgabe (Stadien nach Vergleichs- strategien und/oder Erklärungen des Kindes)	1	58	2	15	 Wechselbeziehung der Aufgaben $V_p = 0,327$ $U = 0,280$ $z = 4,1$ $p < 0.0001$
	2	25	1	18	
	3	8	1	10	
		N = 138			

Tabelle 36

Zahlinvarianzaufgabe nach Piaget in
Beziehung zur Stabaufgabe

Zahlinvarianzaufgabe
(Kodierung nach Piaget)

	1	2	3
1	59	13	4
2	28	13	14
3	4	1	2

Stabaufgabe
(Kodierung
aufgrund
der Ver-
gleichs-
strategien)

Modell I: Wechselbeziehung
beider Aufgaben

$$V_p = 0,331$$

$$U = 0,231$$

$$z = 3,39$$

$$p < 0.0005$$

N = 138

Zahlinvarianzaufgabe
(Kodierung nach Piaget)

	1	2	3
1	58	13	4
2	25	11	8
3	8	3	8

Stabauf-
gabe (Kodie-
rung aufgrund
der Vergleichs-
strategie
und/oder
Erklärungen
des Kindes)

Modell I:
Wechselbeziehung

$$V_p = 0,330$$

$$U = 0,303$$

$$z = 3,71$$

$$p < 0.0005$$

Modell II:
Entwicklungs-
priorität der
Stabaufgaben

$$V_p = 0,217$$

$$U = 0,231$$

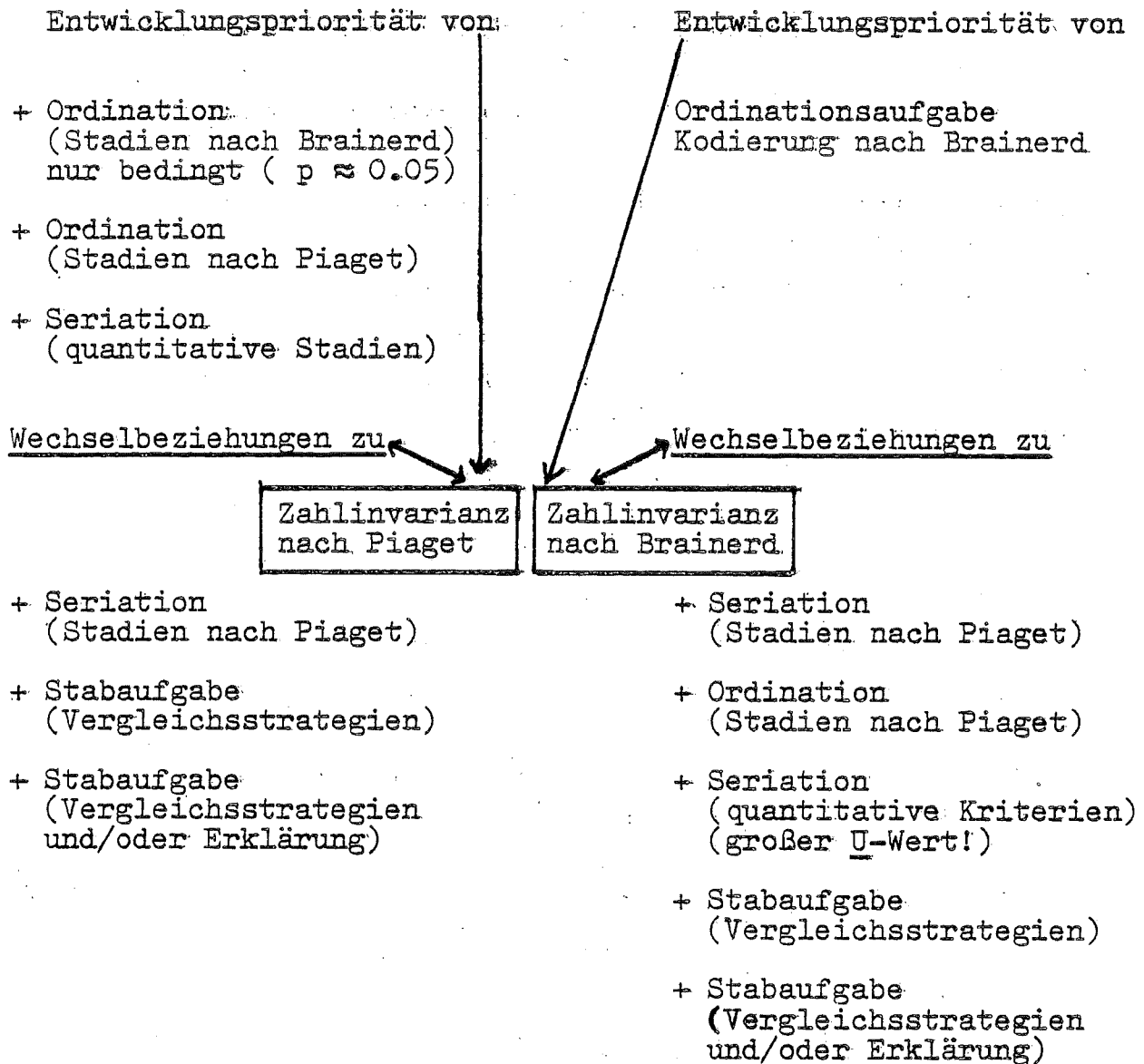
$$z = 2,30$$

$$p < 0.05$$

N = 138

Tabelle 37

Entwicklungsbeziehung zwischen Zahlinvarianz
und Ordinationsaufgaben
(geprüft mit der Vorhersageanalyse, $p = 0.001$
als Trennwert)



Diese Ergebnisse belegen zusammengekommen, wie anfällig die behauptete Reihenfolge in der Entwicklung (Ordination $\rightarrow$ Zahlbegriff), die als zentrale Vorhersage der ordinalen Theorie der Zahlentwicklung dient, für die Auswertungskriterien und die Darbietungsform der Aufgabe ist. Das gilt selbst für die Ordinationsaufgabe im engeren Sinn, die die Längentransitivität zwischen drei verschieden großen/schweren Elementen abbildet. Man kann einige Zweifel darüber haben, ob es möglich ist, ein "reines Konzept" zu messen (vgl. P. H. Miller, 1978), losgelöst von der inhaltlichen Gestaltung der Aufgabe und diagnostischen Fragen (Surber, 1979). Das Verständnis des Kindes für asymmetrische und transitive Beziehungen zwischen Gegenständen ist bei jeder der untersuchten Aufgaben (Ordination, Seriation, Stabaufgabe) an unterschiedlichen Indizien ablesbar. Es scheint nicht zulässig, eine einzelne Aufgabe als Indikator eines "logischen Konzepts" zu verwenden, da die Variabilität der Lösungsstrategien des Kindes in der jeweiligen Aufgabe noch kaum untersucht ist. Früher wurde schon erwähnt, daß das Kind in der Ordinationsaufgabe Lösungswege findet, die das "logische" Verständnis der Transitivität nicht erfordern, z.B. indem es sich die absolute Größe ("das größte") eines Stabs merkt oder indem es sich die räumliche Anordnung vorstellt ("wie eine Treppe"), an der es die Größenbeziehung abliest. Die Erklärungen und Vergleichsstrategien in der Stabaufgabe, die relativ selten eine komplexe (transitive) Vergleichsmethode widerspiegeln, sprechen auch dafür, daß das Kind sich nicht immer auf die logischen Relationen verläßt. (1)

-
- (1) Der Vollständigkeit halber soll angemerkt werden, daß auch die Entwicklungsbeziehungen zwischen Ordinationsaufgabe und den Indikatorvariablen zum Mengenvergleich untersucht wurden. Solche Vergleiche sind z.T. nicht sehr informativ, da es an systematischen Hypothesen fehlt, die ein bestimmtes Entwicklungsmodell vorhersagen. Von Interesse ist aber das Ergebnis, daß die Indikatorvariable "Mengenvergleiche durch Zählen" (EQUZZ, vgl. die Definition im Text über kardinale Vergleiche) eine eindeutige Entwicklungspriorität gegenüber der Ordinationsaufgabe zeigt ($V_p=0,426$, $U=0,202$, $Z=4,31$, $p < 0.0001$). Mengenvergleiche durch Zählen lösen Kinder also typischerweise vor der Ordinationsaufgabe (kodiert nach Stadien Piagets).

In der abschließenden Diskussion wird darauf eingegangen werden, welche Konsequenzen die beobachteten Resultate zur Beziehung Ordination $\rightarrow$ Zahlinvarianz für die ordinale Theorie der Zahlentwicklung haben.

5. Einige Detailergebnisse zu Zählaufgaben

Wahrgenommene Kardinalität

Diese Aufgabe zur Abschätzung der Anzahl abgebildeter Gegenstände, ohne sie abzuzählen, wurde nur den vier- und fünfjährigen Kindern dargeboten. Von besonderem Interesse sind die Ergebnisse für die Vierjährigen, weil z. B. Klahr und Wallace (1976) davon ausgehen, daß das Kind seinen Wahrnehmungsurteilen eher glaubt als dem Ergebnis des Zählens, und somit das direkte Wahrnehmen einer kleinen Menge eine grundlegendere quantitative Strategie ist als das Zählen. Bei den 4-jährigen findet sich noch ein relativ hoher Anteil falscher Lösungen (39 %), die z.T. durch Zählfehler (wenn das Kind trotz Instruktion die Menge abzählt), z.T. durch fehlerhaftes Abschätzen zustandekommen. Immerhin zählen 55 % der 4-jährigen mindestens einmal, um ihr abgeschätztes Ergebnis nachzukontrollieren. Schlüsselt man die Ergebnisse nach der Größe der Menge auf, so zählen die Kinder am häufigsten bei der größten Menge (von der Gesamtlösung lösen die Kinder 22,3 % bei der Menge 2 durch Zählen, 30,5 % für die Menge 3, und 45 % für die Menge 4); mit zunehmender Größe der Menge nimmt also die Sicherheit des Kindes in seinem Wahrnehmungsurteil ab. Dadurch daß die Kinder zwei Lösungswege anwenden können, erhöht sich natürlich die Anzahl der richtigen Lösungen. Bei der Gruppe der 5-jährigen findet man eine relativ große Genauigkeit in den Lösungen; nur noch 22 % der Lösungen sind nicht korrekt. Zugleich greifen die Kinder dieser Altersgruppe wesentlich seltener auf das Zählen als Lösungsmethode zurück, um ihre Antwort zu bestätigen (für die Menge 2, 3, 4 zählen nur noch 4 % bzw. 14,4 % bzw. 20,6 % der Kinder, um ihre Lösungen abzusichern).

Ähnlich wie in den Ergebnissen von Silverman und Rose (1980) zeigt sich, daß Vorschulkinder, wenn sie sich ihres Wahrnehmungsurteils nicht sicher sind, auf die vorgegebenen Gegenstände zeigen und sie abzählen. Mit der Größe der Menge nimmt die Wahrscheinlichkeit zu, daß das Kind zählt, während umgekehrt die Genauigkeit seiner Lösung in Abhängigkeit von der Größe der dargebotenen Anzahl von Gegenständen abnimmt (richtige Lösungen bei den 4-jährigen: Menge 2: 84 %, Menge 3: 78 %, Menge 4: 60 %; bei den 5-jährigen: Menge 2: 98 %, Menge 3: 92 %, Menge 4: 83 %). Bedenkt man, daß die Kinder explizit aufgefordert wurden, die Mengen abzuschätzen ohne zu zählen, ist auffällig, wie häufig sie dennoch auf das Zählen zurückgreifen, um sich der richtigen Lösung zu vergewissern. Die Daten lassen eine Präferenz des Kindes für die direkte Wahrnehmung der Menge nicht deutlich werden. Wenn ihm sein Wahrnehmungsurteil bei größeren Mengen unsicher scheint, greift das Kind auf das Zählen als Lösungsmethode zurück.

Beliebigkeit der Reihenfolge beim Zählen

Wie reagiert ein Vorschulkind auf systematische Wechsel der Position eines Objekts beim Zählen?

Weiß es, daß die Anzahl der Objekte in der Menge gleichbleibt (Konstanz der Kardinalzahl)? Bei der Aufgabe "Beliebigkeit der Reihenfolge beim Zählen" wurde die Position der Gegenstände in einer Reihe kontinuierlich verändert, indem j weils das Objekt an erster Stelle an das Ende der Reihe gelegt wurde.

Der Anteil der korrekt benannten Mengen ist bei den 5- und 6-jährigen Kindern sehr hoch, und nur die vierjährigen Kinder machen bei dieser Aufgabe sehr viele Fehler (6 richtige Lösungen: 4 J.: 36,1 %, 5 J.: 72,6 %, 6 J.: 96,1 %) ($\chi^2 = 26,8$, $df = 2$, $p < 0.0001$). Interessant ist die Frage, wie häufig die Kinder zählen, um die Lösung zu finden. Einmal muß das Kind mindestens zählen, sofern es nicht die Anzahl der Objekte (5) direkt wahrnimmt. Bei der Gruppe der 4-jährigen sind es nur 5,6 % der Kinder,

die lediglich einmal zählen (gegenüber 47, 1 % (5 J.) und 57,5 % (6 J.)). Dagegen finden es fast 70 % der 4-jährigen für notwendig, sechsmal zu zählen, bei jedem Positionswechsel eines Objekts zählen sie also die Menge erneut, noch 42 % der 5-jährigen und 19,6 % der 6-jährigen tun dies ebenso. Dieses Ergebnis ist in zweierlei Hinsicht bedeutsam: einmal ist es erstaunlich, wie häufig die Kinder mit 6 Jahren noch zählen (noch 23,5 % zählen 2 bis 5 mal, 19,6 % sechsmal), trotz der relativ kleinen Menge von fünf Bildern, die an der Grenze der direkten Wahrnehmbarkeit liegt. Man ersieht an diesem Ergebnis, wie schwierig es selbst für Kinder diesen Alters ist, die Konsequenzen einer räumlichen Transformation einzustufen. Zählt ein Kind trotz seiner Unsicherheit, ist die Lösung fast immer richtig, da die Kinder den Zählvorgang bei so kleinen Mengen bereits so weit automatisiert haben, daß er stets fehlerfrei abläuft.

Das zweite Ergebnis hängt mit dieser Genauigkeit des Zählvorgangs zusammen. Ein großer Teil der 4-jährigen zählt sehr häufig (mehr als 94 % der Kinder zählt bei mindestens zwei der Durchgänge), und macht dabei zugleich Fehler. Das Kind wird in seinem Urteil unsicher, weil die Kardinalzahl ein anderes Ergebnis lieferte. Erhält das Kind einmal 5 und das zweite mal 6, wird es eher vermuten, daß sich die Zahl der Gegenstände in der Anordnung doch geändert haben muß. Daher wird es um sicher zu gehen im nächsten Durchgang erneut zählen. Welchen Einfluß weitere Zähl-durchgänge auf das Urteil des Kindes haben, wird unten kurz erwähnt!

Die Lösungsarten des Kindes wurden in Kategorien eingeordnet, die im Kodierungsschema ausführlicher dokumentiert sind. Geht man nach dem Verständnis des Kindes für die Kardinalzahl vor, so ist die häufigste Lösung bei den jüngsten Kindern, daß das Kind jedesmal erneut zählt und bei einem veränderten Zählergebnis auch eine Veränderung der Kardinalzahl der Menge behauptet. Ein 4-jähriges Kind, das einmal 4, dann 5, dann 6 gezählt hat, sagt bestimmt: "Jetzt sind es mehr geworden". Diese Antwortkategorie findet sich bei 55,6 % (4 J.), 11,8 % (5 J.) und 3,9 % (6 J.)

der Kinder. Eine zweite, weiter fortgeschrittene Kategorie besteht darin, daß das Kind zwar jeweils neu zählt, aber an eine Mengenänderung, die ihm der Versuchsleiter nahelegt ("sind es jetzt mehr geworden?"), nicht glaubt. In diese Kategorie fallen notwendigerweise auch die Kinder, die beim Zählen keine Fehler machen, und dadurch in ihrem Urteil nicht unsicher werden (in dieser Antwortkategorie finden sich 33,3 % (4 J.), 27,5 % (5 J.) und 23,5 % (6 J.) der Kinder). Eine weitere Kategorie wird dann definiert, wenn das Kind nur einige Male neu zählt (3 oder 4 mal maximal), aber jedesmal auch ganz sicher ist, daß sich die Menge nicht geändert haben kann. Diese Kategorie ist vergleichsweise selten (2,8 % (4 J.), 7,8 % (5 J.), 2 % (6 J.)).

Schließlich zeigt sich das vollständige Verständnis des Kardinalzahlaspekts darin, daß das Kind nur ein einziges Mal abzählt, und sich dann stets der Anzahl der Objekte in der Menge sicher ist, gleichgültig welche räumliche Transformation vorgenommen wird. In diese Kategorie fallen nur 8,3 % der 4-jährigen Kinder gegenüber 45,1 % (5 J.) und 70,6 % (6 J.) in den anderen Altersgruppen ($\chi^2 = 47,4$, $df = 2$, $p < 0.0001$). Gruppiert man alle untersuchten Kinder nach Gruppen von drei Monaten, beobachtet man bei den Kindern mit 4 und 5 Jahren bis etwa 65 Monaten (5;5) die Kategorie 4 relativ selten. In den ersten drei Gruppen ist stets die Kategorie 1 am häufigsten (48 - 56 Monate). Die Kategorie 4, die ein sicheres Verständnis der Kardinalzahl anzeigt, wird erst ab 65 Monaten stets die häufigste Kategorie. Bei den ältesten Kindern mit 6 Jahren finden sich dann nur noch wenige Kinder, die durch die räumlichen Transformationen in der Aufgabe verunsichert werden.

An einer kleinen Gruppe von 40 Kindern aus zwei Kindergärten wurde die Aufgabe "Beliebigkeit der Reihenfolge beim Zählen" durch eine kleine Zusatzaufgabe ergänzt (Altersverteilung: $N_1 = 10$ (4 J.), $N_2 = 16$ (5 J.), $N_3 = 14$ (6 J.)). Diese Kinder erhielten drei weitere Durchgänge, in denen die Bilder erneut räumlich verschoben wurden. Diesmal erfolgte die Transformation aber nicht linear, sondern der Versuchsleiter legte aus den Bildkarten zunächst eine Treppe, dann eine Blume und schließlich einen ganz großen Kreis (etwa 30 cm Durchmesser). Jedesmal wurde das Kind dann gefragt, wieviele Bilder nun auf dem Tisch liegen.

Bei dieser Zusatzaufgabe zeigt sich zum einen eine Wirkung der Anzahl der Durchgänge; bei diesen Durchgängen (7. bis 10.) fanden

70 % der 4-jährigen, 100 % der 5-jährigen und 93 % der 6-jährigen die richtigen Mengenangaben. Wieviele Kinder zählen noch bei dieser Anordnung? Zwei oder dreimal (von insgesamt drei Durchgängen) zählen noch 30 % der 4-jährigen, 25 % der 5-jährigen und 21 % der 6-jährigen. Mindestens 70 % der Kinder in jeder Altersgruppe zählen dagegen nicht, sind sich also der Anzahl der Objekte, trotz sehr unterschiedlicher räumlicher Transformationen sicher. Obwohl diese Ergebnisse nur vorsichtig zu interpretieren sind, zeigen sie, daß auch die jüngsten Kinder von der Konsistenz der Kardinalzahl überzeugt sind, wenn sie nur häufig genug (und korrekt) gezählt haben. Dennoch zählt noch ein Viertel der Kinder in jeder Altersgruppe, um sich des Ergebnisses zu vergewissern. Man muß sich dabei auch ins Gedächtnis rufen, daß das Kind die Situation als Spiel begreift, und vielleicht - obwohl es sich der Anzahl der Objekte sicher ist - nachprüfen möchte, ob der Versuchsleiter nicht vielleicht doch eine heimliche Veränderung vorgenommen haben könnte. Die Ergebnisse zeigen aber auch, daß sich Kinder zwischen 4 und 6 Jahren nicht unbedingt auf die direkte Wahrnehmung der Menge verlassen (vgl. "subitizing"), und im Zweifelsfall auch eine Menge von 5 noch nachzählen.

6. Klassifikationsaufgaben

6.1 Detallergebnisse einzelner Aufgaben

Bei der Zuordnungsaufgabe muß das Kind ein spezifisches qualitatives Merkmal auswählen, anhand dessen es dem ersten Vergleichsobjekt weitere Bilder zuordnen kann. Durch die Aufgabenstellung ist dieses Kriterium nach drei Bildern erschöpft, eine Zuordnung kann weiter erfolgen, wenn das Kind sein Kriterium wechselt.

Die Auswertung dieser Aufgabe ergibt zunächst ein überraschendes Ergebnis, das aber aus den Antwortlisten der verschiedenen Altersgruppen erklärbar ist. Betrachtet man die Häufigkeiten der Kinder, die bei beiden Aufgabenformen (anschauliche Gegenstände und geometrische Formen) Dimensionenwechsel vornehmen, findet man 36,1 % der 4-jährigen, 43,1 % der 5-jährigen und 29,4 % der 6-jährigen ($\chi^2 = 2,61$, $df = 2$, $p > 0.05$). Zugleich nehmen 52,8 % der 4-jährigen und 54,9 % der 6-jährigen keinen Dimensionswechsel vor. Leider ergibt die Analyse der numerischen Werte keinen Hinweis, welche Gemeinsamkeiten bzw. Unterschiede dem Verhalten der ältesten Kinder bzw. der jüngsten Kinder zugrundeliegen. Aus der Beobachtung der Testsituation kann man entnehmen, daß die jüngeren Kinder, die

keinen Dimensionswechsel vornehmen, nur nach Bildern suchen, die jeweils das gleiche Merkmal haben, und wenn die Bilder erschöpft sind ihre Zuordnung beenden. Die älteren Kinder reagieren oft sehr schnell und kontinuierlich auf die Aufforderung, Objekte zuzuordnen, wählen alle Bilder eines bestimmten Merkmals aus und fassen dann diese Gruppe als abgeschlossene Klasse von Objekten auf, in der das Vergleichsobjekt enthalten ist. Im Unterschied zu den Sechsjährigen, die häufig eine Klasse von Objekten zusammenstellen, gehen die Vierjährigen eher nach einer paarweisen Zuordnung der Merkmale vor ("ein rotes zu einem roten") und wenn sie kein entsprechendes Objekt mehr finden, brechen sie ab. Die gleiche Antwortstrategie ist auch bei einer Gruppe von dreijährigen Kindern zu beobachten ($N = 30$). Bei ihnen waren ebenfalls 59 % nicht bereit, die Dimension innerhalb der Teilaufgabe zu wechseln. Immerhin sind die älteren Kinder weitaus häufiger in der Lage, beteiligte Dimensionen, nach denen die Objekte zugeordnet wurden, zu benennen. Bei den vorgenommenen Dimensionswechseln benennen zumindest einmal eine Dimension 8,3 % der 4-jährigen, 27,5 % der 5-jährigen und 19,6 % der ältesten Kinder ($\chi^2 = 10,0$, $df = 2$, $p < 0.01$).

Für die Aufgabe zur qualitativen Korrespondenz müssen die Kinder zunächst eine qualitative Zuordnung der Objekte nach einer spezifischen Dimension vornehmen, und bei der zweiten Darbietung geometrischer Formen eine qualitative Korrespondenz suchen, die von der ersten Dimension verschieden ist.

Qualitative Korrespondenzen nach der Farbe legen ein großer Teil der Kinder in allen Altersgruppen; eine korrekte Zuordnung aller drei geometrischer Formen gelingt 75 % der 4-jährigen, 78,4 % der 5-jährigen und 86,8 % der 6-jährigen ($\chi^2 = 0,92$, $df = 2$, $p > 0.05$). Die Werte für die Form liegen erheblich niedriger, obwohl der Unterschied zwischen den Altersgruppen nicht bedeutend ist (4 Jahre: 50 %, 5 Jahre: 60,8 %, 6 Jahre: 74,5 %, $\chi^2 = 4,89$, $df = 2$, $p > 0.05$). Bei einem korrekten Dimensionswechsel muß das Kind sich von der Dimension, die es im ersten Durchgang verwendet hat, lösen und eine zweite Dimension erkennen, nach der es zuordnen kann. Eine vollständige Korrespondenz in beiden Durchgängen mit Farbe und Form und damit ein angemessener Dimensionswechsel findet sich bei 36,1 % der 4-jährigen, 41,2 % der 5-jährigen und 60,8 % der 6-jährigen ($\chi^2 = 7,38$, $df = 2$, $p < 0.05$).

Ergibt sich keine angemessene Lösung, so verwenden ungefähr ein Drittel der Kinder eine graphische Zuordnung. Sie bilden ein Haus, oder ein Männchen aus den vorgegebenen Steinen ("figurale Kollektion", Piaget und Inhelder, 1973, S. 41-79) (4 J.: 33,3 %; 5 J.: 33,3 %; 6 J.: 23,5 %). Nur ein kleiner Teil der Kinder (jeweils zwei oder drei in jeder der drei Altersgruppen) stellt in beiden Durchgängen figurale Kollektionen her. Das Bilden einer Figur kann man daher nicht als konsistente Verhaltensstrategie des Kindes bewerten; wahrscheinlicher ist, daß das Kind, wenn es die verlangte Zuordnung nicht findet, die Aufgabenstellung in seinem eigenen Sinne abändert. Eine korrekte Benennung der jeweiligen Klassifikationskriterien gelingt den meisten Kindern; sobald sie die Zuordnung gefunden haben (bei beiden Klassifikationen benennen 33,3 % der 4-jährigen, 47,1 % der 5-jährigen und 52,9 % der 6-jährigen beide Klassifikationskriterien, $\chi^2 = 5,48$, $df = 2$, $p > 0.05$).

Eine korrekte Lösung der Gesamtaufgabe wird dann kodiert, wenn das Kind den Dimensionswechsel von Form nach Farbe vornimmt, und zumindest eine der Dimensionen benennt, nach denen es eine Zuordnung gelegt hat. Für die 3 Altersgruppen finden sich 27,8 % (4 J.), 37,3 % (5 J.) und 52,9 % (6 J.) der Kinder, die die Aufgabe korrekt ($\chi^2 = 8,3$, $df = 2$, $p < 0.05$) lösen.

Die qualitative Korrespondenzaufgabe ist von der Anzahl der Elemente her gesehen, die das Kind beachten muß, nicht besonders schwierig, und es zeigt sich auch bei den Teilaufgaben, wie selbst die jüngsten Kinder die Korrespondenzaufgabe aufgrund eines auszuwählenden qualitativen Merkmals lösen. Schwierig ist für die jüngeren Kinder der Wechsel des Merkmals, nach dem sie zuordnen; ein großer Teil der Kinder (jeweils 40 % bzw. 30 % der 4- und 5-jährigen) legt auch im zweiten Durchgang die Farbe. Wird dann die Aufgabe nicht lösbar, entwirft das Kind eine figurale Kollektion ("ich mache ein Haus") oder bricht die Aufgabe ab. Die Abstraktion verschiedener qualitativer Merkmale und die Auswahl eines angemessenen Kriteriums bereitet Kindern diesen Alters demnach erhebliche Probleme. Erst im Alter von 6 Jahren lösen mehr als die Hälfte der Kinder diese Aufgabe erfolgreich. Die Aufgabenstellung zur qualitativen Korrespondenz zeigt erneut, welche hohen Anforderungen die Klassifikationsaufgaben an Kinder im Vorschulalter stellen.

Dieses Bild unterstützt die Ergebnisse mit der Aufgabe zur Dichotomisierung. Aus vorgegebenen geometrischen Formen verschiedener Farbe soll das Kind im ersten Durchgang zwei Gruppen bilden und im zweiten Durchgang zwei andere von der ersten Gruppe verschiedene Gruppen. Die Auswahl eines einzelnen Klassifikationskriteriums scheint Kindern aller Altersgruppen nicht besonders schwer zu fallen, z. B. wählen eine erste konsistente Dimension 61,1 % der 4-jährigen, 86,3 % der 5-jährigen und 74,5 % der 6-jährigen aus ($\chi^2 = 4,28$, $df = 2$, $p > 0.05$). Die jüngeren Kinder wählen dabei zuallererst die Farbe als Merkmal aus; das Verhältnis der gewählten Dimension geht bei den 4- und 5-jährigen Kindern stets zugunsten der Farbe: die 4-jährigen wählen fast zweimal so oft die Farbe als die Form, die 5-jährigen sogar dreimal so häufig. Bei den 6-jährigen Kindern dagegen ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Kind Farbe oder Form als Klassifikationskriterium wählt exakt gleich groß. Eine konsistente Klassifikation im zweiten Durchgang ist für die untersuchten Altersgruppen fast gleich wahrscheinlich (66,7 % (4 J.), 62,9 % (5 J.), 62,8 % (6 J.)), wobei aber viele Kinder im zweiten Durchgang erneut die gleiche Dimension wählen, das heißt zumeist wieder nach der Farbe ordnen. Erst im Alter von sechs Jahren sinkt der Anteil der Kinder, die im ersten und zweiten Durchgang das gleiche Klassifikationskriterium verwenden unter 50 %.

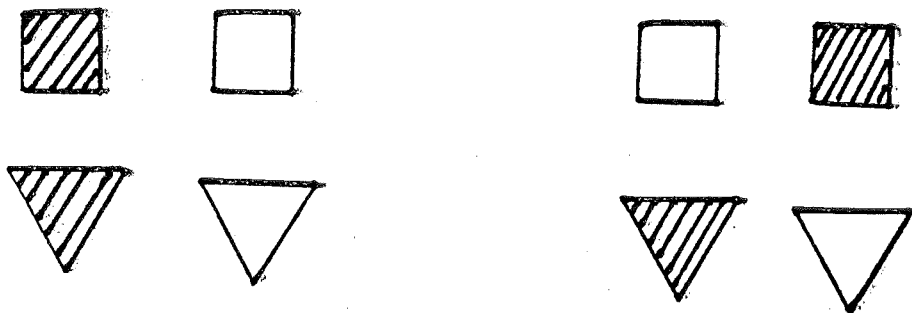
In diesem Zusammenhang ist auch von Interesse, qualitative Besonderheiten der Lösung des Kindes zu erörtern. Piaget berichtet als typische Lösungen für jüngere Vorschulkinder (als Stadium I seiner spontanen Klassifikationsaufgaben), das Legen einer Figur aus den vorgelegten Formen, z. B. ein Häuschen, ein Männchen etc. (Piaget und Inhelder, 1973, S. 41 ff.). Solche sogenannten figuralen Kollektionen finden sich in der vorliegenden Aufgabe ebenfalls relativ oft. Erstaunlich ist allerdings, daß ein Unterschied zwischen den Altersgruppen kaum zu beobachten ist. Nur 55,6 % der 4-jährigen, 56,9 % der 5-jährigen und 58,8 % der 6-jährigen legen in keinem der beiden Durchgänge eine figurale Kollektion ($\chi^2 = 0,1$, $df = 2$, $p > 0.5$). Eine Abnahme mit dem Alter zeigt sich nur in der Zahl der Kinder, die in beiden Durchgängen figurale Kollektionen als Lösung anbieten (27,8 % (4 J.), 21,6 % (5 J.), 17,7 % (6 J.)). Da in keinem der untersuchten Kindergärten besonderer Wert auf die Arbeit mit logischen Blöcken gelegt wurde, kann man vermuten, daß das häufige Legen von figuralen Kollektionen dem natürlichen spielerischen Umgang des Kindes mit geometrischen Formen entspringt.

Aber ein sehr hoher Anteil der Kinder, auch bei den 4-jährigen kann zumindest nach einem Kriterium (bevorzugt der Farbe) eine korrekte Dichotomisierung legen. Dazu trägt auch die anschauliche Instruktion bei, in der das Kind gebeten wird, zwei Häufchen zu machen (was zugleich durch eine motorische Geste unterstrichen wurde).

Eine zweite Antworttendenz ist das Legen von Figur-Farb-Kombinationen. In der Regel legen die Kinder nur in einem Durchgang diese Variationen, bevorzugt im zweiten Durchgang, wenn sie auf die Frage, zwei andere Häufchen als vorher zu legen, keine Antwort wissen. Einige Kinder variieren dann die Zusammenstellung von Formen und Farben untereinander, z.B. legen sie ein gelbes und ein rotes Quadrat über das gelbe und rote Dreieck, und bilden eine entsprechende graphische Anordnung, die aber auch leicht verändert sein kann, auf der anderen Seite des Tisches (s. Abb. 1). Ohne Zweifel nimmt das Kind also die beteiligten Dimensionen wahr und kann sie systematisch miteinander variieren (25 % der 4-jährigen, 39,2 % der 5-jährigen und 31,4 % der 6-jährigen legen in mindestens einem Durchgang eine Figur-Farb-Variation, $\chi^2 = 3,17$, $df = 2$, $p > 0.05$).

Abb. 1

Typische Figur-Farb-Variation bei der Dichotomisierungsaufgabe



Das Bilden einer eindeutigen Dichotomisierung nach zwei verschiedenen Dimensionen fällt Vorschulkindern hingegen überaus schwer, wohl vor allem auch dann, wenn sie in dieser Aufgabenstellung nicht unterwiesen wurden. Lediglich 5,6 % der 4-jährigen, 9,8 % der 5-jährigen und 17,7 % der 6-jährigen legen eine korrekte Dichotomisierung nach der Farbe und nach der Form ($\chi^2 = 6,84$, $df = 2$, $p < 0.05$). Dieser relativ kleine Anteil ist umso

erstaunlicher, wenn man bedenkt, daß das Ordnen nach einer Dimension auch für die jüngeren Kinder nicht so schwierig ist, und zudem auch bei den jüngsten Kindern die Benennung der Dimension (z.B. Farbe) sehr häufig ist. Was den Kindern aller untersuchten Altersgruppen schwer fällt, ist der Wechsel von einer einmal gewählten Dimension auf eine andere. Extrapoliert man die vorliegenden Ergebnisse auf die folgenden Altersgruppen, lösen offenbar erst 7 und 8-jährige Kinder diese Aufgabe konsistent und erfolgreich (Brainerd, 1979). In der Untersuchung von Hooper et al. (1979) liegen bei einer Aufgabe, in der das Kind drei Dichotomien bilden soll, erst die Kinder der zweiten Klasse oberhalb eines Kriteriums von 50 % korrekten Lösungen.

6.2. Zahlinvarianz und Klassifikation

Piagets Theorie der Zahlentwicklung ordnet der Klassifikation eine konstitutive Rolle für den Zahlbegriff zu. Die empirische Forschung hat wie ein Literaturüberblick zeigt, diese These kaum gestützt (Winer, 1980). Die Aufgabe, die das Verständnis des Kindes für eine hierarchische Klassifikation prüft, nämlich die Klasseninklusionsaufgabe, fällt dem Kind erheblich schwerer als die Zahlinvarianz. In der vorliegenden Arbeit wurde die Klasseninklusion daher ausgeklammert. Es wurden aber eine Reihe von Klassifikationsaufgaben herangezogen, um zu untersuchen, weshalb es Vorschulkindern so schwerfällt, verschiedene Gegenstandsbe-
reiche von Merkmalen zu erfassen und auch Wechsel zwischen Dimensionen vorzunehmen. Man kann einen Zusammenhang zwischen der Bildung von qualitativen Klassen und einem abstrakteren Mengenbegriff vermuten, obwohl hierzu wenig gesicherte Forschung als Beleg herangezogen werden kann.

Der Zahlbegriff selbst - repräsentiert wiederum durch die Zahlinvarianzaufgabe - zeigt bei unterschiedlichen Schwierigkeiten der Klassifikationsaufgaben entweder eine Wechselbeziehung zu Klassifikationsaufgaben, nämlich bei der Dichotomisierung (Tabelle 38), oder aber er folgt der Klassifikation in der Entwicklung nach,

wie bei der qualitativen Korrespondenz (Tabelle 39). Die qualitative Korrespondenz ist auch deshalb für das Kind anschaulicher, weil die Bildung einer Klasse von Objekten durch das Finden einer vollständigen Korrespondenz nahegelegt wird. Die Aufgabe fordert das Kind unmittelbarer auf, eine neuartige Dimension zur Klassifikation zu finden.

Bei der Dichotomisierung muß man die Beziehung zur Zahlinvarianz insofern relativieren, als der Anteil der Kinder in Stadium 3 der Dichotomisierung doch recht niedrig ist (12 %). In der Kontingenztafel mit der Zahlinvarianzaufgabe nach Piaget finden sich zudem 11 Kinder in Stadium 3 der Dichotomisierung, die nur Stadium 1 der Zahlinvarianz erreichen. Man könnte vermuten, daß diese kleine Gruppe von Kindern sehr intensive Erfahrungen mit logischen Blöcken gemacht hat. Beide Ergebnisse deuten darauf hin, daß die Entwicklungsbeziehung zwischen Dichotomisierung und Zahlinvarianz vorsichtig interpretiert werden muß. Dies gilt auch bei der Kodierung der Zahlinvarianzaufgabe nach Brainerd.

Tabelle 38

Zahlinvarianz in Beziehung zu
Klassifikationsaufgaben
(Dichotomisierung)

Klassifikation
(Dichotomisierung)

	1	2	3
1	22	58	11
2	4	21	2
3	0	17	3

N = 138

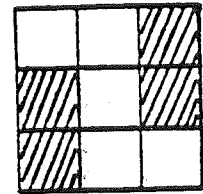
Klassifikation
(Dichotomisierung)

	1	2	3
1	22	58	11
2	0	4	0
3	4	34	5

N = 138

Zahlinvarianz
(Stadien nach
Piaget)

Zahlinvarianz
(Stadien nach
Brainerd)

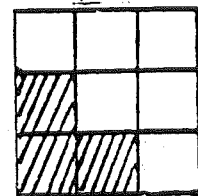


Modell I: Wechselbe-
ziehung der beiden
Aufgaben

$$V_p = 0,595$$

$$U = 0,272$$

$$z = 8,44 \quad p < 0.001$$

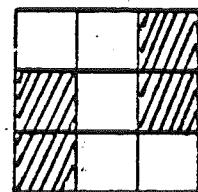


Modell II: Dichoto-
misierung geht der
Zahlinvarianz vor

$$V_p = 0,077$$

$$U = 0,165$$

$$z = 0,828 \quad p > 0.1$$



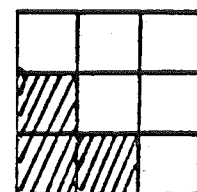
Modell I: Wechselbe-
ziehung beider Aufgaben

$$V_p = 0,245$$

$$U = 0,144$$

$$z = 1,75$$

$$p < 0.05$$



Modell II: Dichoto-
misierung geht der
Zahlinvarianz voraus

$$V_p = 0,019$$

$$U = 0,281$$

$$z = 0.6 \quad p > 0.1$$

Tabelle 39

Zahlinvarianz in Beziehung zu
Klassifikation (qualitative Korrespondenz)

Zahlinvarianzaufgabe
(Stadien nach Piaget)

1 2 3

Klassifikation
(qualitative
Korrespondenz)

1	5	1	0
2	48	9	10
3	38	17	10

N = 138

Modell I: Entwick-
lungspriorität der
Klassifikation

$$V_p = 0,064$$

$$U = 0,085$$

$$z = 0,254$$

$$p > 0.5$$

Zahlinvarianzaufgabe
(Stadien nach Brainerd)

1 2 3

Klassifikation
(qualitative
Korrespondenz)

1	5	0	1
2	48	3	16
3	38	1	26

N = 138

Modell II: Entwick-
lungspriorität der
Klassifikation

$$V_p = 0,259$$

$$U = 0,166$$

$$z = 2,17$$

$$p < 0.05$$

7. Entwicklungsbeziehungen zwischen Kardinations- und Ordinationsaufgabe nach Brainerd

Für die Analyse der Beziehung zwischen Kardination und Ordination kann zunächst die Gruppe von 5- und 6-jährigen Kindern betrachtet werden, die die Kardinationsaufgabe ohne Stäbchen dargeboten bekam ($N = 61$). Kodiert man beide Aufgaben wieder nach identischen Kriterien (nämlich jenen von Brainerd), ist die Entwicklungspriorität mit der Kontingenztafel nicht belegt und statistisch nicht abgesichert ($V_p = -0,178$, $p > 0.1$) (s. Tabelle 40). Man könnte allerdings vermuten, daß dieses ungünstige Ergebnis im Sinne der Hypothesen der ordinalen Theorie durch die Verteilung der Niveaus der Kardinationsaufgabe beeinflusst ist (18 % der Kinder haben Stadium 3 erreicht). (1)

Wird die Ordinationsaufgabe zusätzlich über die Erklärungen des Kindes kodiert (also im Sinne der Stadien Piagets), ist die Beziehung beider Aufgaben bei der untersuchten Gruppe von Kindern noch schwerer einzuschätzen. Die beiden besten Vorhersagemodelle von vier untersuchten (Entwicklungspriorität der Ordination, der Kardination, bzw. 2 Modelle der Wechselbeziehung) sind in Tabelle 41 dargestellt. Die Verteilung unterstützt eine Wechselwirkung der Aufgaben aufgrund des V_p - und U-Wertes. Diese Daten sollten aber vorsichtig interpretiert werden, da die Stadienverteilung der Ordinationsaufgabe (Stadien 1 und 3) und der Kardination (Stadium 3) nicht günstig für die Untersuchung von Entwicklungsbeziehungen sind. Auch muß daran erinnert werden, daß die vorliegende

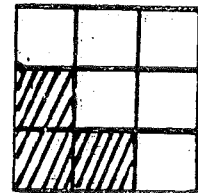
(1) Dieses Problem ist übrigens auch in anderen Untersuchungen gegeben, die die Entwicklungsbeziehung zwischen Ordination und Kardination prüfen. So ist in Brainerd & Fraser (1975, S. 29) die Kontingenztafel sehr ungünstig gefüllt, um eine Entwicklungsbeziehung systematisch abzusichern (nur 6,4 % der Kinder erreichen Stadium 3 der Kardination). Die Entwicklungspriorität läßt sich mit dieser Tabelle über die Vorhersageanalyse nicht absichern ($V_p = -0,279$, $U = 0,049$, $Z = -0,764$, $p > 0.2$). Natürlich ist die Verteilung der Ordinationsaufgabe bei Kindern, die Stadium I der Kardination erreichen, ein Indiz, daß die Ordinationsaufgabe leichter für Kinder diesen Alters ist (vgl. ähnliche Ergebnisse bei Gonchar, 1975).

Tabelle 40

Entwicklungsbeziehungen zwischen Brainerds Kardinationsaufgabe und der Ordinationsaufgabe nach Brainerd

		Ordinationsaufgabe (Kodierung nach Brainerd)		
		1	2	3
Kardinationsaufgabe (ohne Stäbchen) Kodierung nach Brainerd	1	3	11	8
	2	6	9	13
	3	0	6	5

N = 61



Modell I: Entwicklungspriorität

$$V_p = -0,178$$

$$U = 0,170$$

$$z = 0,943$$

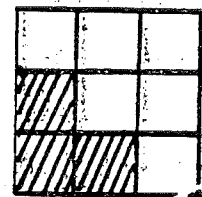
$$p > 0.1$$

Tabelle 41

Entwicklungsbeziehung zwischen Brainerds Kardinationsaufgabe und der Ordinationsaufgabe nach Piaget

		Ordinationsaufgabe (Kodierung nach Piaget)		
		1	2	3
Kardinationsaufgabe (ohne Stäbchen) Kodierung nach Brainerd	1	3	18	1
	2	5	17	6
	3	0	5	6

N = 61

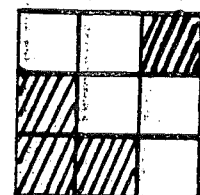


Modell I: Entwicklungspriorität der Ordination

$$V_p = 0,214$$

$$U = 0,208$$

$$z = 1,42 \quad p < 0.05$$



Modell II: Wechselbeziehung der beiden Aufgaben

$$V_p = 0,368 \quad z = 2,27$$

$$U = 0,285 \quad p < 0.05$$

Bei der Aufgabe mit Stäbchen werden die erwarteten Entwicklungsmodelle zur Ordination nicht bestätigt. Weder die Wechselbeziehung beider Aufgaben, noch die Entwicklungspriorität der Kardination mit Stäbchen (die aufgrund des Verständnisses der Korrespondenz anschaulich wäre) ist in der Kontingenztafel statistisch belegt (Tabelle 42/43). Vermutlich ist auch hier die Altersverteilung nicht günstig (vgl. Niveau 1 der Kardination und Niveau 1 der Ordination). Die Kodierung der Ordinationsaufgabe nach Piaget ergibt für Stufe 3 der Aufgabe einen relativ kleinen Teil erfolgreicher Lösungen (13 %) und ist daher für die Bewertung des Entwicklungsmodells eher im Sinne einer Wechselwirkung beider Aufgaben wirksam.

Zusammengenommen ergeben die Untersuchungen des Verständnisses von Brainerds Ordinations- und Kardinationsaufgabe keine eindeutigen Belege für die Priorität des Konzepts der Ordination. Offenbar sind einige Reizfaktoren (z.B. die relative Anzahl der Mengen) ebenso bedeutsam wie die Wahrnehmungsunterstützung der Korrespondenzrelation selbst. Es ist daher schwer zu akzeptieren, Brainerds Kardinationsaufgabe sei eine angemessene Operationalisierung des Konzepts "logischer Klassen". Die Tatsache, daß die Aufgabe mit Stäbchen dem Kind relativ leichter fällt, zeigt die mögliche Bedeutung der Korrespondenzrelation für den Mengenvergleich bei statisch angeordneten Mengen.

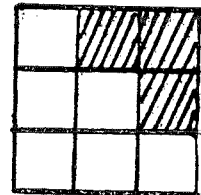
Tabelle 42

Entwicklungsbeziehung zwischen Brainerds
Ordinationsaufgabe und der Kardina-
tionsaufgabe mit Stäbchen

	Ordinationsaufgabe (Kodierung nach Brainerd)		
	1	2	3
Kardinations- aufgabe mit Stäbchen (Kodierung nach Brainerd)	1	2	3
	6	8	5
	5	14	6
N = 96 (6 Kinder entfallen wegen unvollstän- diger Kodierung)	3	10	24
		18	

Modell I: Wechselbe-
ziehung in der Ent-
wicklung

$$\begin{aligned} V_p &= 0,137 \\ U &= 0,314 \\ z &= 1,32 \quad p > 0.05 \end{aligned}$$



Modell II: Entwick-
lungspriorität der
Ordination

$$\begin{aligned} V_p &= 0,152 \\ U &= 0,233 \\ z &= 1,36 \quad p > 0.05 \end{aligned}$$

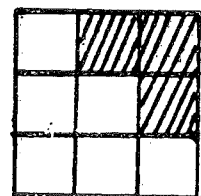
Tabelle 43

Entwicklungsbeziehungen
zwischen Ordinationsaufgabe
und Kardinationsaufgabe mit
Stäbchen (5/6 Jahre)

	Ordination (Kodierung nach Piaget)		
	1	2	3
Kardinationsauf- gabe mit Stäb- chen (Kodierung nach Brainerd)	1	2	3
	5	14	1
	6	15	5
N = 97 (5 Kinder entfallen wegen unvollstän- diger Kodierung)	3	8	36
		7	

Modell I: Wechselbe-
ziehung in der Ent-
wicklung

$$\begin{aligned} V_p &= 0,059 \\ U &= 0,219 \\ z &= 0,515 \quad p > 0.1 \end{aligned}$$



Modell II: Entwick-
lungspriorität der
Ordination

$$\begin{aligned} V_p &= -0,021 \quad z = -0,140 \\ U &= 0,202 \quad p > 0.1 \end{aligned}$$

In einer kleinen Zusatzstudie wurde 30 Kindern außerhalb der Hauptuntersuchung (14 Kinder mit 5 Jahren und 16 mit 6 Jahren) die Kardinationsaufgabe ohne Stäbchen und anschließend die gleiche Aufgabe mit Stäbchen vorgelegt. Diese Reihenfolge wurde festgelegt, um Korrespondenzlösungen, die das Kind bei der zweiten Aufgabe nahegelegt bekommt, nicht für die erste Aufgabe zu übertragen. Vergleicht man die Leistungen des Kindes in den beiden Aufgaben, so ist in der Gesamtaufgabe die Aufgabe mit Stäbchen wesentlich leichter ($t = 2,80$, $df = 29$, $p < 0.01$). Der Mittelwertsunterschied beträgt 0,73 (bei 6 richtigen möglichen Lösungen in jeder Teilaufgabe). Die Analyse der Teilaufgaben der Kardination ergibt, daß sich bei den beiden Aufgaben zur Eins-Zu-Eins-Korrespondenz (die im 5. und 6. Durchgang dargeboten werden) die Einführung der Korrespondenzrelation mittels der Stäbe offenbar am stärksten auswirkt ($t = 2,63$, $p < 0.05$, $df = 29$); Mittelwertsunterschied 0,47 bei 2 richtigen Lösungen), während sie bei der Eins-Zu-Eins-Relation, bei der einzelne Figuren kein Stäbchen zugeordnet bekommen etwas weniger eindeutig ist ($t = 2,07$, $p < 0.05$, $df = 29$; Mittelwertsunterschied 0,33 bei vier möglichen richtigen Lösungen).

8. Zusammenfassung und kritische Bewertung der Theorien der Zahlentwicklung

Zunächst soll auf die Ergebnisse der Untersuchung eingegangen werden, die Vorhersagen der drei Theorien der Zahlentwicklung nachzuprüfen suchten. Dazu gehören die Begrifflichen Bereiche der Ordination, des Zahlbegriffs (widergespiegelt durch die Zahlinvarianz), der Klassifikation und schließlich der Kardination.

Die ordinale Theorie der Zahlentwicklung stützt sich besonders auf die Vorhersage, daß das Kind die Ordination in seiner Entwicklung vor dem Zahlbegriff erwirbt. Die Ergebnisse für die untersuchten Altersgruppen zeigen, daß die Reihenfolge von Ordination und Zahlinvarianz in der Entwicklung erheblich beeinflußt wird durch die Kriterien, nach denen die Entwicklungsaufgaben ausgewertet werden (Urteil und/oder Erklärung) und auch durch die kognitiven Anforderungen der speziellen Aufgabe (Ordination, Seriation, Stäbe einfügen). Die Beobachtung der Lösungswege des einzelnen Kindes, vermittelt z. B. über die Erklärung des Kindes lassen vermuten, daß die Konstruktion des Kindes nicht immer vereinbar sein muß mit dem logischen Konzept, das eine Aufgabe bewerten soll. Immer dann, wenn eine Ordinationsaufgabe strengere Kriterien im Sinne einer transitiven Lösung einschließt - etwa wenn das Kind die Transitivität beschreibt oder systematische (Meß-)Vergleiche zu den Nachbarstäben vornimmt - ist die behauptete Priorität des Konzepts der Ordination in der Entwicklung gegenüber der Zahlinvarianz nicht abgesichert. Auch die Auswertungskriterien der Zahlinvarianz spielen eine Rolle: wählt man die "konservativen" Stadiendefinitionen nach Piaget, sind die Vorhersagen der ordinalen Theorie leichter zu bestätigen (3 Ordinationsaufgaben, die eine Priorität in der Entwicklung zeigen) als bei Stadiendefinitionen, die nur die kognitiven Urteile des Kindes einschließen (1 Ordinationsaufgabe mit Entwicklungspriorität).

Diese Resultate lassen zwei Schlüsse zu, die aber eng miteinander zusammenhängen. Der erste wäre zunächst, daß die Vorhersagen der

ordinalen Theorie nur begrenzte Unterstützung finden; viel naheliegender ist aber zu folgern, die betroffenen logischen Konzepte seien unzureichend operationalisiert, so daß eine logisch notwendige Beziehung in empirischen Beobachtungen nur begrenzt sichtbar wird. Darüber hinaus könnte man aber auch bezweifeln, ob die kognitiven Prozesse des Kindes "vollständig logisch sein können unter völligem Ausschluß des empirischen Inhalts" (Shultz, et al., 1979, S. 100). Damit führen die mehrdeutigen Ergebnisse über die Entwicklungsbeziehungen zwischen Zahlinvarianz und Ordinationsaufgaben auf die Frage, ob es denn überhaupt sinnvoll oder möglich ist, "reine" logische Konzepte zu messen, oder ob nicht vielmehr jedes Konzept in einen Komplex von Reizbedingungen und Vorerfahrungen des Kindes eingebettet sein muß, der neben der "logisch notwendigen" Lösung eine Vielzahl anderer Lösungswege nahelegt. Die Abbildungsrelation zwischen logischem Konzept (z.B. Ordination als asymmetrische transitive Beziehung zwischen drei Elementen) und empirischer Aufgabenstellung (verschiedenen Ordinationsaufgaben) ist im Grunde unbestimmt. Diese Unbestimmtheit wirft aber die Frage auf, welche Bedeutung dann eine logisch abgeleitete Beziehung zwischen zwei Konzepten als Modell von Entwicklungsprozessen haben kann. Die ordinale Theorie gibt darauf keine Antwort.

Die Wechselbeziehungen zwischen Ordination und Kardination ergeben ähnlich nur eine begrenzte Unterstützung der Vorhersagen der ordinalen Theorie. Diese Ergebnisse sollten aber vorsichtiger interpretiert werden, weil sie sich auf eine kleinere Gruppe von Kindern stützen. Zweifel bestehen allerdings über die Hypothese, die Kardinationsaufgabe sei eine zufriedenstellende Operationalisierung des Konzepts der "logischen Klasse", nach dem das Kind die Korrespondenzrelation anwendet, um zwei Mengen zu vergleichen. Die Kardinationsaufgabe mit Stäbchen fällt nämlich Kindern wesentlich leichter als die Aufgabe ohne Stäbchen. Die Entwicklungsbeziehung zwischen Ordination und Kardination ist bei der Aufgabe mit Stäbchen noch weniger gesichert als bei der Aufgabe ohne Stäbchen. (Dieses Ergebnis wird wieder mit der Einschränkung betrachtet, daß die Verteilung der Stadien der beteiligten

Entwicklungsaufgaben in der Altersgruppe von 5 und 6 Jahren ungünstig für die Untersuchung des Entwicklungsmodells sein könnte.)

Es bleibt auch hier das Problem der Operationalisierung eines logischen Konzepts (der "logischen Klassen ähnlicher Klassen"), das sich an der Beeinflußbarkeit der Leistung des Kindes durch verschiedene Reizfaktoren in der Aufgabe offenbart. Die vermutete Entwicklungsabfolge zwischen Ordination und Kardination findet bei Variationen einzelner Aufgabenfaktoren nur mäßige Unterstützung im Sinne der ordinalen Theorie. Dieses Ergebnis hat für die ordinale Theorie aber keine so weitreichenden Konsequenzen wie die früher berichteten Resultate zur Ordination, denn das Kardinationskonzept hat in dieser Theorie nur eine untergeordnete Bedeutung. Da die Ergebnisse nicht eindeutig zugunsten eines bestimmten Konzepts sind, fügen sie sich auch in das Bild der Zahlentwicklung ein, das die kardinale Theorie und die Theorie Piagets entwerfen.

Die Theorie Piagets erhält durch die Untersuchungsergebnisse eine begrenzte Unterstützung. Für einen Teil der Ordinationsaufgaben läßt sich eine Wechselwirkung bzw. parallele Entwicklung zu den Stadien der Zahlinvarianz beobachten, wobei dieses Resultat aber abhängig ist von den verwendeten Stadienkriterien. Piagets Thesen einer Parallelität der Strukturen der Seriation und des Zahlbegriffs werden auch durch die Tatsache bestätigt, daß komplexere Ordinationsaufgaben, in denen das Kind den transitiven Lösungsweg entweder sprachlich beschreiben oder in seiner Handlung demonstrieren muß, sich stets in ein Entwicklungsmodell einfügen, das eine Wechselbeziehung zur Zahlinvarianz annimmt. Die untersuchte Klassifikationsaufgabe der Dichotomisierung zeigt - in Übereinstimmung mit Piagets Theorie - einen parallelen Verlauf der Entwicklung von Zahlinvarianz und Klassifikation an. Eine einfachere Klassifikationsaufgabe, in der das Kind Zuordnungen nach unterschiedlichen Klassifikationskriterien vornehmen soll, geht der Zahlinvarianz in der Entwicklung voraus. Diese Ergebnisse muß man aber insofern einschränken, als sie von den Stadienkriterien der Zahlinvarianzaufgaben abhängen.

Obwohl sich Piagets Theorie der Zahlentwicklung, die auf einer angenommenen Parallelität und zunehmenden Synthese der Entwicklung von Seriation, Klassifikation und Zahlbegriff gründet, in den Untersuchungsergebnissen relativ gut abbildet, bleibt für sie ebenfalls das Problem, daß Entwicklungsbeziehungen durch die Wahl der Stadienkriterien einer erheblichen Variation unterliegen.

Bei den kardinalen Vergleichen selbst beobachtet man, daß es Kindern stets leichter fällt, zwei vorgelegte Mengen zu vergleichen - sei es durch Zählen oder Korrespondenz - als aktiv eine gleich große Vergleichsmenge zu einer ersten Menge herzustellen. Da manche Kinder solche kardinalen Strategien noch nicht völlig systematisiert oder automatisiert haben, fällt es ihnen offenbar schwerer, eine erste Teilmenge im Gedächtnis zu behalten, während sie die Vergleichsmenge herstellen, als zwei anschaulich gegebene Mengen zu vergleichen.

Detaillierte Beobachtungen der Lösungen der Kinder bei Zähl- und Korrespondenzaufgaben ergeben eine Vielzahl von Hinweisen auf Schwierigkeiten, die bestimmte Aufgabenstellungen dem Kind bereiten. Auffällig ist die Häufigkeit mit der gerade die jüngsten Kinder - mehr als ältere - die Korrespondenz einsetzen, um bei Zählaufgaben ihre Lösung zu kontrollieren. Dagegen ist das Zählen als Kontrollstrategie bei einer unsicheren Lösung bei den ältesten Kindern am häufigsten. Obwohl die große Zahl von Beobachtungen bei den einzelnen Aufgaben hier nicht angemessen zusammengefaßt werden kann, fällt die Flexibilität mit der Kinder zwischen vier und sechs Jahren auf Aufgaben zum Vergleich von Mengen reagieren ins Auge. Kurz: Vorschulkinder üben kardinale Strategien systematisch und wenden sie mit dem Alter zunehmend erfolgreicher bei größeren Mengen an.

Untersucht man die Beziehungen zwischen den verschiedenen kardinalen Aufgaben, in denen das Kind Mengenvergleiche durch Zählen und Korrespondenz vornimmt, und der Zahlinvarianz, wird deutlich, daß Vorschulkinder kardinale Strategien erfolgreich einsetzen können, bevor sie die Invarianz der Menge gegenüber räumlichen Transformationen verstehen. Die Kinder wenden zwischen 4 und 6

Jahren Strategien an, sowohl um Mengen zu vergleichen, die ihnen vorgelegt werden (durch Zählen und Korrespondenz), als auch um eine Vergleichsmenge aktiv herzustellen. Solche Mengenvergleiche bei numerisch quantifizierten Mengen nimmt die Mehrzahl der Kinder vor, ehe sie die Zahlinvarianz meistern. Auch die Resultate zu den sogenannten Indikatorvariablen, die jeweils zwei Aufgabenstellungen der Zähl- bzw. Korrespondenzaufgaben zusammenfassen, bestätigen dies. Zwar findet sich für die Korrespondenzaufgaben keine so deutliche Unterstützung für eine Entwicklungspriorität gegenüber der Zahlinvarianz, aber die Erklärung dafür ergibt sich aus den Schwierigkeiten des Kindes, sich bei den Korrespondenzrelationen über die Bedeutung räumlicher Reize (wie der Länge) klar zu werden.

Hier beobachtet man eine Gemeinsamkeit zwischen der Aufgabe "Äquivalenz durch Korrespondenz" und der Zahlinvarianz: werden mehrdeutige räumliche Reize (z.B. Länge, Dichte) durch die Umordnung der Objekte in die Aufgabe eingeführt, genügt es nicht mehr für das Kind, sich auf einfache Mengenvergleiche zu verlassen, sondern es bedarf einer aktiven Rekonstruktion der Aufgabenstellung, entweder indem das Kind Zustände der Mengen vor und nach der Transformation vergleicht, oder aber indem es eine systematische Vergleichsstrategie anwendet, nämlich die Korrespondenzrelation.

Aufgaben, in denen sie ordinale Aspekte des Zählvorgangs systematisch anwenden müssen, nämlich die Aufgabe zur Seriation der Zahlen und die Aufgabe zum Positionswechsel beim Zählen ("Beliebigkeit der Reihenfolge beim Zählen") bewältigen Vorschulkinder schließlich eindeutig vor der Zahlinvarianz.

Die Geschicklichkeit mit der Vorschulkinder numerische Strategien anwenden können, um Mengen von Gegenständen zu vergleichen, Ordnungsbeziehungen zwischen Mengen herzustellen und auch aktiv Vergleichsmengen zu finden, macht Piagets Position unanschaulich, Vorschulkinder verfügten nicht über ein Verständnis der numerischen Quantifikation. Zählvorgang und Korrespondenzrelation vermitteln dem Kind einen anschaulichen Zugang zur "arithmetischen Einheit",

die später Teil operativer Vorgänge werden kann (nämlich der elementaren Operationen wie der Addition).

Die Strategien, die das Kind zum Vergleich von Mengen zur Verfügung hat, bilden eine Klasse von Lösungsstrategien, die in die erfolgreiche Lösung der Zahlinvarianz eingehen dürften. Sie sind bedeutsam, weil sie dem Kind erlauben, Zustände einer Menge oder zweier Mengen (z.B. vor und nach einer Transformation) zu vergleichen. Es sind solche Vergleichsstrategien, die dem Kind ermöglichen, Klassen von Transformationen zu bilden, nämlich einerseits Klassen von Transformationen, die eine Menge (die Größe einer Menge) unverändert lassen (z.B. räumliche Transformationen), und andere Klassen von Transformationen, die die Anzahl der Objekte in einer Menge verändern (z.B. Addition). Die Unterscheidung solcher Transformationsklassen ist vermutlich grundlegend für die systematische Lösung der Zahlinvarianz (vgl. Pascual-Leone et al., 1978; Shultz et al., 1979). Daraus werden die beobachteten Entwicklungsbeziehungen zwischen verschiedenen kardinalen Aufgaben und der Zahlinvarianz sehr anschaulich.

Andererseits steht das Spektrum an Lösungsmethoden über das Vorschulkinder im Umgang mit Zahlen und konkreten Repräsentationen von Mengen haben im Widerspruch zu den logisch fundierten Theorien der Zahlentwicklung, der Zahlbegriff leite sich aus den systematischen Ordnungsbeziehungen her, die das Kind aus einem (oder mehreren) logischen Konzeptbereichen abstrahiere. Zumindest können alle drei Theorien der Zahlentwicklung nicht verdeutlichen, in welcher Weise das Kind sein konkretes Wissen über Zahlen und Mengenvergleiche in eine komplexere Handlungsstruktur einbettet.

Abschließend soll ein theoretisches Problem erörtert werden, das die vorliegende Arbeit aufwirft. Die Probleme der Operationalisierung verschiedener Konzepte - Ordination, Kardination und auch des Zahlbegriffs - wurden mehrfach erwähnt. Die Untersuchungsergebnisse zeigen die Bedeutung verschiedener diagnostischer Kriterien für Konzepte, da sie die beobachtbaren Entwicklungsbeziehungen zwischen verschiedenen Aufgaben erheblich beeinflussen

können. Diese diagnostischen Fragen treten gegenüber einer viel grundlegenderen theoretischen Problemstellung zurück. Versucht man Entwicklungsbeziehungen zwischen zwei kognitiven Aufgaben zu prüfen, so erfordert dies zu allererst die Definition von logisch und/oder entwicklungslogisch äquivalenten Aufgaben. Dies betrifft die Konzepte der Ordination, der Kardination und auch des Zahlbegriffs, weil die bislang vorliegenden Theorien der Zahlentwicklung ihre Vorhersagen auf die "notwendigen" Reihenfolge bestimmter Konzepte in der Entwicklung gründen.

"Sind zwei Verhaltensindikatoren x ; und y ; zweier mathematischer Vorstellungen x und y , gegeben, so wird je präziser die Korrespondenz zwischen x ; und x und zwischen y ; und y ist, die Wahrscheinlichkeit umso höher sein, daß irgendeine logische Beziehung zwischen x und y sich in einer Verhaltensbeziehung zwischen x ; und y ; widerspiegelt" (Brainerd, 1973 , S. 277). Dieser Satz Brainerds enthält im Grunde zwei Fehlschlüsse, die auf anschauliche Weise die theoretischen Probleme der vorliegenden Zahltheorien hervorheben. Einmal stellt sich die Frage, ob es eindeutige Korrespondenzregeln zwischen logisch-mathematischen Konzeptionen und Verhaltensstrukturen gibt, oder ob nicht - wie in den theoretischen Vorarbeiten gezeigt werden sollte - zumindest mehrere solcher Korrespondenzregeln zu finden sind: denn weder Verhaltensstrukturen noch mathematische Konzepte sind formal völlig eindeutig zu beschreiben und zu begrenzen (das gilt insbesondere für die Definition des Zahlbegriffs). Es stellt sich natürlich auch die Frage, was ein Verhalten indizieren könnte, daß ein "rein logisches Konzept" repräsentiert, und welche Beziehung solch ein formal begrenztes Verhalten zum konkreten Wissen hat, das ein Kind in der Entwicklung erwirbt. Kurz: welche Beziehung kann man überhaupt unterstellen zwischen der Axiomatisierung eines Konzepts wie der Zahl und dem Zugang, den Kinder im Laufe der Entwicklung zu Zahlen finden?

Zum zweiten ist Brainerds Annahme, eine logische Beziehung zwischen zwei Konzepten (z.B. Inklusion eines Konzepts in einem anderen) müsse der Entwicklungsbeziehung zwischen vergleichbaren

Verhaltensindikatoren entsprechen, zweifelhaft. Auch der Mathematik gelingt es nicht, ein Konzept völlig auf ein zweites zurückzuführen und bestimmte formale Relationen können durch die Wahl unterschiedlicher logischer "Bausteine" anders dargestellt werden. Russells logische Axiomatisierung der Zahl und der Arithmetik stellt das Konzept der Ordination als "Ableitung" aus einem grundlegenden Konzept der "logischen Klassen" (die über die Korrespondenzrelation definiert sind) dar, während eine ordinale Axiomatisierung die Kardination als "Abkömmling" grundlegender Ordnungsstrukturen formal bestimmt. Man kann einige Zweifel darüber haben, ob die Mathematik tatsächlich formale Entscheidungsregeln kennt, die Auskunft geben, welches Konzept grundlegender ist, oder ob sie nicht vielmehr nur "Konstruktionsregeln" formuliert, die erlauben, das eine Konzept aus dem anderen herzuleiten. Ob diese Konstruktionsregeln nun tatsächlich die konstruktiven Prozessen in der Denkentwicklung des Kindes entsprechen müssen, darüber kann die Mathematik bzw. die Logik keine zwingende Aussage machen.

Obwohl die Diskussion von der Frage der Definition logischer bzw. entwicklungslogisch äquivalenter Aufgaben ausging, führt sie auf die Problematik, welche Bedeutung die Definition logischer Konzepte in der mathematischen Philosophie für die Entwicklungspsychologie haben könnten. Es wurde bereits betont, daß Modelle kindlichen Verhaltens im Grunde mehrdeutig sein müssen, um der beobachtbaren Flexibilität im Verhalten des Kindes und verschiedenartigen Lösungswegen, die es anbietet, gerecht zu werden. (1) Die logisch begründeten Theorien der Zahlentwicklung sind im Grunde zu unflexibel, um dieser Forderung gerecht zu werden. Piagets Theorie kommt dieser Anregung noch am nächsten, selbst wenn die Formulierung der Zahlbegriffsentwicklung sich noch streng an die logischen Axiomatisierungen zu halten sucht. Sie böte wahrscheinlich eine Perspektive an, ein Bild des konstruktiven

(1) vgl. Institutsbericht, Teil I

Wissenserwerb des Kindes zu entwerfen. Dazu müßte die Theorie Piagets oder Weiterentwicklungen dieser Theorie viel stärker die konkreten Fertigkeiten des Kindes im Umgang mit Zahlen und seine flexible Anwendung des Wissens um die geordnete Folge der (natürlichen) Zahlen (die z.B. über den Zählvorgang vermittelt wird) in verschiedenartigen Aufgabenkontexten betrachten. Kann sie ein anschauliches Bild des Erwerbs des konkreten Wissens entwerfen, das Vorschulkinder mit und über Zahlen haben, wird sie auch der Frage eher gerecht werden können, wie dieses Wissen allmählich in konsistente (logisch begründbare) Konzepte übergeht.

+++++

(Die Literaturangaben in diesem Text finden sich in
der Bibliographie im ersten Teil des Institutsberichts.)