

BERICHT
aus dem
PSYCHOLOGISCHEN INSTITUT
DER UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Diskussionspapier Nr. 24/I
April 1981

DIE ENTWICKLUNG DES ZAHLBEGRIFFS ⁺

Teil I. ENTWICKLUNGSLINIEN DES ZAHLBEGRIFFS
IM VORSCHULALTER: Übersicht über
theoretische Probleme und empirische
Untersuchungen
mit einer Bibliographie zur Zahl-
begriffsentwicklung

Friedrich Voigt

1. Teil

THEORETISCHE ANSÄTZE ZUR ERKLÄRUNG DER ZAHLBEGRIFFS - ENTWICKLUNG UND IHRE PROBLEME

1.	Erkenntnistheoretischer Rahmen der Zahlbegriffs- entwicklung	S. 1
2.	Piagets Theorie	S. 5
2.1.	Probleme der Theorie Piagets	S. 12
3.	Kardinale Theorie	S. 18
4.	Ordinale/relationale Theorien	S. 22
5.	Empirische Untersuchungen zur Gültigkeit der drei Theorien	S. 26
5.1.	Untersuchungen, die die ordinale Theorie unterstützen	S. 26
5.2.	Empirische Überprüfung der Theorie Piagets	S. 34
6.	Mengen, Klassen, Zahlen: Exkurs über die Mengen- lehre	S. 37
7.	Formalistische und konstruktive Ansätze und die Definition des Zahlbegriffs	S. 41
7.1.	Bedeutung formalistischer/konstruktivistischer Ansätze für die Definition des Zahlbegriffs in der Entwicklungspsychologie	S. 45
8.	Probleme logisch-struktureller Modelle und ihrer kognitiven Repräsentation : Bedeutung für die Zahlbegriffsentwicklung	S. 50
8.1.	Piagets Modell der Zahlinvarianz	S. 52
8.2.	Repräsentation logischer Modellvorstellungen	S. 56
9.	Lösungsmodelle für spezifische Aufgabenklassen : Erörterung von Fertigkeits - und Regelmodell	S. 62

+++++

Gliederung des Institutsberichts :

ENTWICKLUNGSLINIEN DES ZAHLBEGRIFFS IM VORSCHUL-
ALTER

.....

1. Teil

Theoretische Ansätze zur Erklärung der Zahlbegriffs-
entwicklung und ihre Probleme

2. Teil

Welches Verständnis haben Vorschulkinder von Zahlen?
Überblick über wichtige Indikatoren

S. 73

3. Teil

Bibliographie : Theoretische und empirische Arbeiten
zur Entwicklung des Zahlbegriffs

S. 122

.....

1. Erkenntnistheoretischer Rahmen der Zahlbegriffsentwicklung

"Die Epistemologie der natürlichen Zahlen war ein Diskussions-thema seit Helmholtz, Frege, Russel, Poincaré bis zu Hilbert, Brouwer und Weyl. Dies schließt Fragen ein wie: ob der ordinale oder der kardinale Aspekt konstitutiv für die Zahl ist, ob die Zahl eine vorgegebene Entität ist wie Poincaré und die Intuitionisten annehmen, oder ob sie auf die Logik reduzierbar ist wie Frege und Russell behaupten" (Wittmann, 1975, S. 53).

Die mathematischen und philosophischen Deutungen des Zahlbegriffs wurden stets als grundlegend für die Mathematik als Ganzes betrachtet. Die philosophische Beschäftigung mit verschiedenen Arten von Zahlen (reellen Zahlen, rationalen Zahlen, irrationalen Zahlen etc.), die wiederum aus der praktischen Arbeit mit Zahlssystemen hervorging, wurde dadurch systematisiert, daß verschiedene Mathematiker gegen Ende des 19. Jahrhunderts (z.B. Dedekind, Cantor) zeigen konnten, daß die verschiedenen Zahl-systeme aus einer grundlegenden Theorie der natürlichen Zahlen aufgebaut werden können. "Die resultierende übergreifende Theorie der Zahlen erlaubt uns die verschiedenen Arten von Zahlen als einer einzigen Familie zugehörig zu betrachten, die alle einer Elternform entspringen und alle von Gesetzen beherrscht werden, die streng deduktive Folge jener Gesetze sind, die die Elternform bestimmen" (Barker, 1967, S. 527). Durch diese Betrachtungsweise wird verständlich, weshalb sich die philosophischen Fragen zur Zahl auf die natürlichen Zahlen konzentrierten. In der Mathematik ist diese reduzierende Betrachtungsweise natürlich nicht unumstritten, aber diese weiterführenden Probleme können hier zurückgestellt werden.

In der mathematischen Philosophie stellt sich als ein zentrales Problem die Frage nach der Natur der natürlichen Zahlen. "literalistische" Philosophien der Zahl (vgl. Barker, 1967, S. 528 - 530) gehen von einer unabhängigen Existenz der Zahl aus. Zu dieser Gruppe von Sichtweisen gehören nominalistische Ansätze, die Zahlen als konkrete Objekte in der Welt der Gegenstände behandeln; konzeptualistische Ansätze, die die Zahl als abstrakte Entitäten

betrachten, die durch die "Aktivität des menschlichen Denkens geschaffen werden" (Barker, 1967, S. 529) (vgl. Kants synthetisches a priori Wissen von den Zahlen); und schließlich platonistische Thesen, die Zahlen als abstrakte Elemente betrachten, die außerhalb des menschlichen Denkens bestehen.

Daneben gibt es aber auch "nichtliteralistische" (Barker) Formulierungen der Zahl: einmal vertreten durch den Formalismus, der die Zahlen gleichsam als Elemente in einem "abstrakten Spiel" behandelt, und sie daher nur unter dem Gesichtspunkt betrachtet, welche Regeln auf sie anwendbar sind. Ein vorsichtigerer Ansatz des Formalismus sucht die Prinzipien und Axiome der Zahltheorie als Verallgemeinerung aus dem Zählvorgang abzuleiten. Danach geht die elementare Zahltheorie aus unserem konkreten Wissen über den Prozeß des Zählens und seiner Ergebnisse hervor, und sie verallgemeinert nur die Erfahrungen, die uns das Zählen an konkreten Anordnungen von Objekten zugänglich macht.

Eingebettet in diese relativ groben philosophischen Sichtweisen finden sich verschiedenartige Versuche in der Mathematik durch die Aufstellung von Axiomen und deduktiven Verallgemeinerungen, eine mathematische Grundlage für die elementare Zahlentheorie und damit den Begriff der natürlichen Zahl zu finden. Die logisch Überzeugendsten dieser Theorien werden später im Rahmen der Darstellung der kardinalen und der ordinalen Theorie der Zahlbegriffsentwicklung aufgegriffen.

Aber erst die genetische Epistemologie Piagets hat versucht, das "erkenntnistheoretische Problem der natürlichen Zahl in ein empirisches Problem umzuwandeln, nämlich dem, die Psychogenese des Zahlkonzepts zu untersuchen" (Wittman, 1975, S. 53). Damit verlieren die erkenntnistheoretischen Fragen aber nicht ihr Gewicht für den Zugang zum Problem der natürlichen Zahl. Piaget sucht seine erkenntnistheoretischen Gedanken z.T. an der Ähnlichkeit bzw. Analogie zwischen den Entwicklungsmechanismen in der Wissenschaftsgeschichte, speziell der Mathematik, und den Mechanismen in der Ontogenese des Kindes festzumachen. So besteht die Gefahr, wissenschaftstheoretische Fragen, die der Geschichte

der Mathematik zugrunde liegen, mit entwicklungspsychologischen Gesichtspunkten zu vermischen. Piagets logische Herleitung des Zahlbegriffs aus Strukturen der asymmetrischen Relationen und der Klassifikation könnte u. U. als Versuch gewertet werden, unvollständige philosophische bzw. mathematische Ansätze zur Axiomatik des Zahlbegriffs, die im 19. und 20. Jahrhundert aufgestellt wurden, zu integrieren und in der Synthese ein stabileres und überzeugenderes Bild des Zahlbegriffs zu finden. Piagets Diskussion (z.B. Piaget, 1975) sucht in diesem Sinn auch die Mängel der ordinalen Ansätze (z.B. Peano) und der logisch-klassifikatorischen Ansätze (vgl. Russell) durch eine umfassendere Synthese in der Deutung der Psychogenese aufzuheben.

Indem er aber in den traditionellen Positionen in der Mathematik seinen Ausgangspunkt sucht, übernimmt Piaget unbefragt die Sicht, daß die Arithmetik und der Begriff der natürlichen Zahl letztlich auf die Logik zurückführbar ist bzw. aus ihr begründet werden kann. Daher erscheint die Psychogenese der Zahl gleichsam als Übersetzung des logischen in ein genetisches Modell (vgl. Beth & Piaget, 1966). Die Psychogenese müßte die logischen Implikationen, die der deduktiven Ableitung des Zahlbegriffs zugrunde liegen, buchstäblich nachvollziehen. Es scheint außer Zweifel, daß Piaget verschiedene axiomatische Ansätze und z.T. seine eigene Position so gedeutet hat (Piaget, 1975). Die formale Notwendigkeit der logischen Ableitung des Zahlbegriffs (bei Peano, Russell oder in Piagets Gruppierungsmodell) findet ihr Gegenstück in dem Verlauf der Psychogenese der Zahl (Beth & Piaget, 1966, S. 252-253).

Ohne der späteren Diskussion vorzugreifen, kann man hier festhalten, daß die Mathematik selbst die logische Grundlegung der Arithmetik mit Unbehagen betrachtet. Formalistische und konstruktivistische Mathematik bzw. Arithmetik suchen im Grunde die erkenntnistheoretischen Probleme in den logischen Ansätzen zu umgehen. Abgesehen davon sind in der Entwicklungspsychologie für die Frage, in welchen "Erkenntniszusammenhang" das Kind die Zahl einordnet, die verschiedenen logischen Abgrenzungen innerhalb der Mathematik wenig hilfreich. Die mathematischen Theoreme gehen streng deduktiv vor und leiten aus einer begrenzten Zahl von

Axiomen Modelle eines mathematischen Gegenstandsbereichs ab (wie hier der natürlichen Zahlen). Solch ein Vorgehen ist als Modell für entwicklungspsychologische Prozesse aber kaum aufschlußreich. Für die Erklärung von Entwicklungsprozessen scheint im Gegensatz dazu der klassische Gedanke (seit Platon) anschaulicher, daß menschliches Erkennen von anschaulich gegebenen Einzelfällen und Einzelformen zu den abstrakten "Allgemeinbegriffen" fortschreitet.

In allen Theorien der Zahlentwicklung wird solch eine Abstraktionsleistung als zentraler Entwicklungsschritt angenommen; das Kind entnimmt z.B. die logischen Ordnungsbeziehungen (auch innerhalb der Zahlenreihe) aus der Abstraktion wahrgenommener Ordnungsbeziehungen (so die ordinale Theorie). Die Abstraktion erschließt somit ein logisches Prinzip, das als Voraussetzung für die Lösung gewisser Aufgabenstellungen von Bedeutung ist.

Ein einfacher Abstraktionsprozeß (wie in der Aristotelischen Philosophie beschrieben) geht von konkreten Gegenständen und deren qualitativen Merkmalen aus. Indem das Kind das Objekt von allen Qualitäten befreit, und nur ein qualifizierendes Merkmal beibehält (z.B. die Farbe; eine Ordnungsbeziehung), kann es das Objekt in einen logischen Zusammenhang stellen. Hier handelt es sich also um die Abstraktion qualitativer statischer Merkmale.

Bei Piagets "reflektierender Abstraktion" (abstraction réfléchissante) erfolgt die Abstraktion nicht für qualitative Merkmale, sondern für Handlungen und Operationen. Diese Abstraktion schließt daher ein, daß das Kind eine Handlung oder Handlungszusammenhänge wahrnimmt bzw. erkennt; daß es über diese Handlung "nachdenkt" und daher in eine andere symbolische Ebene einbezieht; und schließlich daß diese "reflektierten" Handlungen oder Operationen in einen neuen Handlungszusammenhang bzw. kognitiven Bezug eingeordnet werden, somit strukturelle Beziehungen hergestellt werden. Die reflektierende Abstraktion ist eine "Rekonstruktion mit neuen Kombinationen", das Kind rekonstruiert z.B. Handlungssysteme auf kognitiver Ebene und koordiniert verschiedene kognitive operative Vorgänge dann zu einer neuen Struktur (vgl. Piaget, 1971, S. 320-321).

Neben der Frage, welche Abstraktionsprozesse das Kind in seiner kognitiven Entwicklung leistet, stellt sich auch die nach dem anschaulichen Zugang zu Zahlen. Zu den anschaulichen Gegebenheiten für das Kind gehört u. a. sein konkreter Umgang mit Zahlen im Zählvorgang und der Vergleich von Mengen von Objekten über Zahlen. Seltsamerweise ignorieren die wichtigen Theorien zur Zahlentwicklung die konkreten Erfahrungen des Kindes mit Zahlen. Stattdessen

wird durch die logische Eingrenzung des Zahlbegriffs auch der "Erfahrungsbereich" des Kindes begrenzt, aus dem dieses sein Wissen über den Zahlbegriff ableiten soll. So ist notwendig auch der Blick dafür beschränkt, welche Fertigkeiten und welches Wissen Kinder im Vorschulalter über Zahlen haben, noch bevor sie ein integriertes Verständnis des Zahlbegriffs erwerben. "Ich weiß wie man zwei und zwei ausrechnet. Ich muß nur noch lernen, wie Mathematik geht" (Sonja, zitiert nach Ginsburg, 1977, S. 18).

Nachdem im folgenden die drei Theorien der Zahlentwicklung (Piagets Theorie, kardinale Theorie und ordinale Theorie) kritisch dargestellt wurden, wird versucht, ausgehend von formalistischen und konstruktivistischen Positionen in der Mathematik, die Schwäche von logisch begründeten Theorien der Zahlentwicklung darzulegen. Zusätzlich wird auch untersucht, wie die drei Theorien der Zahlentwicklung empirisch geprüft werden können und welche der Theorien vom gegenwärtigen empirischen Kenntnisstand begünstigt wird. Daran schließt sich eine Übersicht an, in der eine breite Sicht des Entwicklungsprozesses eingenommen wird, in der auch der Zählvorgang und die Verbesserung der Zählfertigkeiten neues Gewicht bekommt.

2. Piagets Theorie der Zahlentwicklung

Piagets Theorie der Zahlentwicklung nimmt einen besonderen Platz in seinen erkenntnistheoretischen Arbeiten ein, weil in ihr Begriffe erarbeitet wurden, die für die Deutung der Entwicklung anderer Erkenntnisbereiche grundlegend sind. Eingebettet in die Stadienkonzeption wird die Entwicklung des Zahlbegriffs zum Paradigma für das allmähliche Entstehen logisch-mathematischer Operationen (Piaget, 1971). Unter anderem wurde der logische Begriff der Gruppierung von Piaget herausgearbeitet und verfeinert, um die angenommene Synthese logischer Operationen bei der Entstehung des Zahlbegriffs anschaulicher belegen zu können.

Piaget gibt in einem seiner Übersichtsbücher eine Zusammenfassung der Zahlbegriffsentwicklung, die seinen theoretischen Standpunkt

verdeutlicht: "Die Zahl resultiert aus der Koordination der Handlungen und nicht aus den speziellen Handlungen als ein Produkt der reflexiven Abstraktion (1), auf die sich die neuen Kompositionen auf jeder neuen Stufe ohne funktionelle Diskontinuität stützen, ist also mit den fundamentalsten Aktivitäten des Subjekts verbunden, ohne jedoch von vornherein in den Ausgangskoordinationen enthalten zu sein. Sie ist auch durch diese Koordinationen ständig an die Realität angepaßt, ohne indessen von den Objekten abstrahiert zu sein" (Piaget, 1975, S. 141).

Dieser Textauszug illustriert Piagets kontinuierliche Betonung des konstruktivistischen Entwicklungsprinzips. Die Zahl soll nicht aus "speziellen Handlungen hervorgehen" (Piaget, 1975), sondern sie konstituiert sich durch die Koordination allgemeiner Handlungsstrategien, die selbst wiederum aus koordinierten Teilhandlungen hervorgingen. Im handelnden Umgang mit konkreten Gegenständen baut das Kind im Laufe des Vorschulalters ein Verständnis für die Handlungssysteme des Vereinigens (also der Bildung von Klassen von Objekten) und des Ordners (des Aneinanderreihens von Objekten mit unterschiedlicher Ausprägung auf einem bestimmten Merkmal) auf. Diese Handlungsschemata sind aber selbst wieder auf Koordination hin angelegt, wie Teilsysteme, die auf Teilaspekte der Realität angewandt werden können, und im Umgang mit gleichen Objekten verschmelzen können. Gruppiert man Objekte nach ihren qualitativen Gemeinsamkeiten in Klassen oder aber ordnet man die Gegenstände nach ihrer Ausprägung auf einer bestimmten Dimension, so wendet man unterschiedliche Operationen an, die sich zunächst wechselseitig ausschließen (Piaget, 1975). Piaget geht nun davon aus, daß aus der Integration der beiden qualitativen Gruppierungen der asymmetrischen hierarchischen Klassen und der asymmetrischen Relationen die "additive Gruppe der ganzen Zahlen" entsteht. Dabei

(1) Die Übersetzung ist unglücklich, selbst wenn Piaget in seinen älteren Arbeiten nicht eindeutig zwischen "reflexiven" und "reflektierenden" Prozessen unterschieden hatte. In neueren Arbeiten spricht er stets dann von "reflektierender Abstraktion", wenn er die bewußte Abstraktion und Komposition von Handlungen durch das Kind diskutiert (Piaget, 1971, 1977a, 1976 a, b).

abstrahiert das Kind von den unterscheidenden Eigenschaften, die den Operationen der Klassenbildung und der Aufreihung zugrunde liegen. Die Elemente der qualitativen Gruppierungen verwandeln sich in "Einheiten", die das Grundprinzip der natürlichen Zahlen ausmachen und zugleich die formalen Eigenheiten der enthaltenen Gruppierungen bewahren.

Piaget unterstellt weiter, daß das Kind, wenn es von jedem differenzierenden qualitativen Merkmal abstrahiert, individuelle Elemente nur dann noch unterscheiden kann, wenn es sie in eine systematische Ordnung bringt. Diese Ordnung kann räumlich sein, oder zeitlich, oder auch im Vorgang des Zählens wiedergegeben werden. Das bedeutet: "der Übergang von der Klasse zur Zahl erfordert daher die notwendige Einführung eines Faktors außerhalb der Systeme, die ausschließlich aus Klassen gebildet sind, nämlich, der seriierten Ordnung, die aus der Gruppierung der asymmetrischen transitiven Beziehungen übernommen ist" (Beth & Piaget, 1966, S. 265).

In einer relativ kurzen und präzisen Darstellung seiner Vorstellungen zur Konstruktion der natürlichen Zahlen in "Mathematic epistemology and psychology" (Beth & Piaget, 1966) betont Piaget, daß die genetischen Daten eine deutliche Sprache sprechen. Die Entwicklung der Zahl (nachgeprüft anhand des minimalen Kriteriums für den Erwerb der Zahl, der Zahlinvarianzaufgabe) erfolgt gleichzeitig mit den Strukturen der Klassifikation und der asymmetrischen Relation (z.B. Seriation von Objekten nach ihrer Länge). Die Stadien für diese drei Strukturen werden in deutlicher Analogie zueinander beschrieben und auch die Fehler, die das Kind im 1. und 2. Stadium der Herausbildung der Strukturen zeigt, sprechen für eine "relative anfängliche Nichtdifferenzierung zwischen Strukturen der Zahlen, Klassen und Relationen, ehe sie ihre spezifischen Charakteristika erwerben" (Beth & Piaget, 1966, S. 262).

Wichtig für die Abgrenzung von anderen Theorien des Zahlbegriffs ist die Betonung des konstruktiven Aufbaus der kognitiven Strukturen aus dem aktiven, handelnden Umgang des Kindes mit seiner Umwelt. "Weder die Operation der qualitativen Reihenbildung noch a fortiori die der ordinalen Numerierung sind in der Erfahrung

gegeben, in der inneren nicht mehr als in der äußeren. Diese Operationen werden der Erfahrung hinzugefügt, in derselben Art wie Handlungen auf Objekte ausgeübt werden, seien diese in der Erinnerung oder im aktuellen Bewußtsein gegeben. Aus der direkten Strukturierung der Erfahrung erfolgen sie nicht ohne weiteres" (Piaget, 1975, S. 73).

Die Abstraktion von Objekten bzw. die Abstraktion von physikalischen Eigenschaften ist nicht ausreichend für das Aufstellen einer geordneten Folge (wie sie die natürlichen Zahlen darstellen); vielmehr erfordert die operative Reihenbildung eine "Abstraktion sui generis, nämlich gerade die Abstraktion von den Handlungen" (Piaget, 1975, S. 73). Denn "die Bildung einer geordneten Folge ist eine Operation, die ihre Komponenten abstrahieren kann, nicht nur vom Gedächtnis, sondern auch aus der Anordnung der Bewegungen in einer Folge von Gesten usw; kurz, von jeder in die inneren Verhaltensformen eingreifende Ordnung" (Piaget, 1975, S. 74). Indem das Kind im Laufe seiner Entwicklung im Vorschulalter eine Abfolge von sensumotorischen Handlungen abstrahiert, konstruiert es eine neue "übergeordnete Handlung". Die abstrahierte Eigenschaft wiederum wird in ein "vollständiges Schema" eingegliedert. Piaget spricht hier vom Vorgang der reflektierenden Abstraktion, der auf der repräsentationalen Ebene eine Handlung höheren Niveaus erzeugt, und den Übergang zu den konkreten Operationen (speziell der Seriation) vorbereitet.

Piaget versucht die Konstruktion der natürlichen Zahlen durch eine Verbindung zweier Gruppierungen zu erklären. Für die Gruppierung der Klassenbildung (asymmetrische Klassifikation), die die Kombination von einzelnen Klassen zuläßt ($A + A' = B$ etc.) ist eine inverse Operation, ein Nullelement und ein tautologisches Element definiert; die Assoziativität gilt für nicht-tautologische Addition und Subtraktion (d.h. solange kein Element addiert wird, das das Ausgangsergebnis beläßt, wie es ist). Für die Gruppierung der Seriation (asymmetrische Relation), die die Definition von Ordnungsrelationen zwischen verschiedenen Elementen entlang einer Dimension festlegt ($A(a)A'$, $A'(a)B'$ etc.), sind ebenfalls inverses Element, tautologisches Element und Nullelement definiert und die Assoziativität gilt für nicht-tautologische Operationen (vgl. Beth & Piaget, 1966, S. 266; Flavell, 1963). Die beiden Gruppierungen können nicht zugleich auf qualifizierte Elemente angewandt werden; qualifizierte Elemente "können nicht gleichzeitig klassifiziert und seriell aufeinander bezogen (werden) d.h. unabhängig von einer Ordnung kombiniert werden (zwischen A und A', B und B' etc.) und zugleich geordnet werden" (Beth & Piaget, 1966, S. 266).

Werden jedoch die qualitativen Merkmale abstrahiert, so können die beiden kognitiven Systeme in ein "einzelnes System verschmelzen". Um die eine Struktur mit unqualifizierten Elementen anwenden zu können, muß die zweite Gruppenstruktur miteingesetzt werden. Aus der Synthese der beiden Gruppierungen leitet sich auch ab, daß die Gruppierung der natürlichen Zahlen allgemeinere formale Eigenschaften hat: die Elemente in einer seriierten Ordnung lassen sich permutieren (vikariante Ordnung); und die Elemente, die zu Klassen zusammengefaßt werden, lassen sich ebenfalls permutieren (allgemeine Überlappung) (Beth & Piaget, 1966, S. 267). Die Formalisierung von Grise (vgl. Beth & Piaget, 1966, S. 268-272) versucht zu zeigen, wie aus den Gruppierungen der Klassen und der asymmetrischen-transitiven Relationen durch formale Kombinationen das System der natürlichen Zahlen herzuleiten ist. Piaget deutet dies als Hinweis darauf, wie der natürliche Konstruktionsprozeß des Kindes in einer formalen Konstruktion seine Entsprechung finden kann.

Obwohl dies hier nicht weiter ausgeführt werden kann, muß man sich bewußt bleiben, daß Piagets Konstruktion der Zahlentwicklung aus der Kritik verschiedener mathematischer Axiomatisierungen bzw. Deutungen der Zahl (z.B. von B. Russell) herleitet. Einige dieser Systeme werden in anderen Theorien der Zahlentwicklung wieder aufgegriffen (vgl. die ausführliche Darstellung in Piaget, 1975). Piaget schreibt dementsprechend, daß die verschiedenen axiomatischen Systeme der Zahl, sei es von Peano, Russell oder Quine im Grunde Modelle "möglicher genetischer Prozesse" sind. Beispielsweise erschließt er aus dem axiomatischen System von Russell wie die Kardinalzahl unabhängig von den Ordinalzahlen verstanden werden kann (und somit losgelöst von der Zahlenfolge), "so daß irgendeine Kardinalzahl unabhängig erworben werden könnte, ohne daß die Kardinalzahlen niederer Ordnung vorher erworben worden wären" (Beth & Piaget, 1966, S. 253). Dagegen sind bei Peano die Ordinalzahl und die Kardinalzahl eng verbunden und aufeinander bezogen (op cit. S. 252/253). Piaget geht also von einer eigentümlichen Gemeinsamkeit zwischen logischem Modell (formal-axiomatischem Modell) und genetischen Prozessen aus.

Beim Zählen meint Piaget, daß das Objekt "völlig beliebig" sei, denn qualitative Merkmale des Objekts werden nicht berücksichtigt, während die Numerierung "die einzige auftretende Ordnung" ist. "Das Objekt spielt in dieser Art von Erfahrungen nur die Rolle einer Unterstützung der Handlung" (Piaget, 1975, S. 131). Die

Zählhandlung fügt gleichsam die Zahl den Objekten nur hinzu (op cit., S. 132), das Assimilationsschema des Zählens orientiert sich an der Beliebigkeit der Objekte, das Schema erfordert jedoch keine Abstraktion. "Denn um die Zahl aus einer Menge von Objekten zu abstrahieren, müßte man diese Objekte klassifizieren und ordnen können, was aber Handlungen des Subjekts sind, die auf diese Menge ausgeübt werden. Das Schema der Zahl reduziert sich aber gerade auf diese Handlungen des Klassifizierens und des Ordners, die lediglich auf eine neue Art gruppiert werden" (Piaget, 1975, S. 132).

Um Piagets Unterscheidung zwischen Zählen und der "Zahl" zu verdeutlichen, greift man am besten auf eine begriffliche Unterscheidung zurück, die er in einer seiner letzten Arbeiten verwendet hat (Piaget & Voyat, 1979, S. 71-72). Zählen könnte man ein "Prozedurschema" (1) (procedural schema) nennen. Dies besteht aus einer "Sequenz von Handlungen, die dazu dienen ein Ziel zu erreichen" (Piaget & Voyat, 1979, S. 71). Wird ein solches evokiert, z. B. wenn das Kind zur Zählhandlung aufgefordert wird, so entfaltet sich das vorliegende Schema, aber nur in einer "sich präsentierenden Konstruktion" (Piaget & Voyat, 1979, S. 71). Abhängig vom Grad der Koordination und dem Maß an Automatisierung, mit der das Schema der Zählhandlung vom Kind beherrscht wird, ist dieses Schema beeinflussbar von spezifischen Situationen (z. B. störende räumliche Reize, wenn die zu zählenden Objekte nicht in einer Linie angeordnet sind), in denen es zur Anwendung kommt.

Die Zahl selbst (oder der Zahlbegriff) ist dagegen eher mit Piagets Begriff des operationalen Schemas identifizierbar. Ein operationales Schema ist ein "Prozedurschema, das von der Anwendung regulierter und allgemeiner Mittel (oder Operationen) abhängt" (Piaget & Voyat, 1979, S. 71). Der Zahlbegriff ist - anders als die Zählhandlung - in ein koordiniertes Handlungssystem eingeordnet, das durch seine Unabhängigkeit von speziellen Eigenschaften der Objekte erlaubt, daß die Zahl " auf unbegrenzte

(1) Ein treffenderer Ausdruck wäre "Ablaufschema".

Weise und über die Bereiche der Wahrnehmung und jeder bildhaften Vorstellung der Objektmengen hinausgebildet werden (kann) und ... somit bestimmt jenseits der Grenzen des Objekts (liegt)" (Piaget, 1975, S. 133).

In welcher Weise dieses Handlungssystem der Zahl in der Entwicklung herausgebildet wird, versuchen Robert, C  llerier & Sinclair (1972) an der Beobachtung der verschiedenartigen Konstruktionen eines einzelnen Kindes zu veranschaulichen. Zum Beispiel bildet Katia (4;9) mit einer Gruppe von verschiedenen Tieren (Fische, Enten, Schwäne etc.) mehrere Untergruppen, dann verschiedene qualifizierte Korrespondenzen (etwa zwei Schwäne zusammen), die dann aber auch durch nichtqualifizierte Korrespondenzen ergänzt werden (Schwäne und Enten). Katia bildet Klassen aus verschiedenen Tieren (Fische, Enten), teilt gleiche Klassen auf (fünf Enten werden in zwei Gruppen von drei und zwei Enten auseinandergeschoben und neben die Gruppe von drei Fischen gelegt). Das Kind verschiebt die Elemente in den beiden Klassen (eine bestimmte Ente der einen Klasse wird der anderen zugeordnet und umgekehrt) und versucht nach Ansicht der Autoren so die Beziehung zwischen logischer Gruppe und numerischer Gruppe zu finden. Schließlich reiht Katia die verschiedenen Tiere auf, zunächst gemäß ihrer Zugehörigkeit nach den Klassen (drei Fische, dann vier Enten, dann ein Schwan), wobei sie die Anzahl der Objekte in den verschiedenen Klassen zu vergleichen sucht. Schließlich permutiert sie die Elemente, so daß immer ein Fisch, eine Ente usw. kommt.

Für 4- und 5-jährige Kinder nennen Robert, C  llerier und Sinclair (1972, S. 295) drei Charakteristika im Verhalten: Objekte werden in parallelen Anordnungen in Linien aufgereiht; logische Klassen (d. h. Objekte, die nach einem bestimmten Merkmal zusammengehören) werden nach topologischen Gesichtspunkten angeordnet (alle Fische liegen beieinander); Mengen werden gezählt. In diesem Alter haben figurative Faktoren erheblichen Einfluß (z.B. bei der Anordnung zweier Reihen mit verschiedenen Längen); die Zahl wird vom Kind zunächst mit räumlichen Aspekten (Länge) identifiziert.

Baut das Kind logische Folgerungen auf diesen räumlichen Größen auf, z. B. indem es die Reihe von Objekten in "gleichlange" Klassen aufzutrennen versucht, löst dies u. U. eine Kette von Handlungskoordinationen und Umordnungen der Objekte aus, die das Kind dem Verständnis der Zahl näherbringen. In gleicher Weise muß das Kind sich aber von der figurativen Unterstützung befreien, um die Koordination der Handlungen für sich zu verstehen - losgelöst von räumlichen und zeitlichen Aspekten -, um schließlich durch den Vorgang der "reflektierenden Abstraktion" die "zeitlosen" Aspekte der Handlungsstruktur zu abstrahieren. In eindringlicher Weise wird von Robert et al. (1972, S. 299) veranschaulicht, wie verschiedene Handlungsstrukturen (Klassifikation, Aneinanderreihen von Objekten) und figurative Faktoren (Zuordnung und Länge, topologische Nähe) zusammenwirken könnten, um den Begriff der "Zahl" allmählich von den konkreten physikalischen Aspekten zu lösen und als abstraktes, kognitives System entstehen zu lassen.

2.1 Probleme der Theorie Piagets

Eine Schwäche des Systems von Piaget zeigt sich in seiner Kritik an Bertrand Russells Deutung der natürlichen Zahlen. Russell versteht die natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen, die als Klassen aller ähnlichen Klassen nach einer zweieindeutigen Korrespondenz als äquivalent eingestuft werden können (1). Piaget unterscheidet selbst zwei Formen der Eins-Zu-Eins Korrespondenz: eine qualitative zwei-eindeutige Korrespondenz, bei der die Korrespondenz auf qualitativen Gemeinsamkeiten beruhen (vgl. Beth & Piaget, 1966, S. 263); und eine zwei-eindeutige Korrespondenz beliebiger Art, wobei die qualitativen Merkmale abstrahiert sind, und ein beliebiges Element einer ersten Gruppe von Objekten mit einem beliebigen Element einer zweiten Gruppe gepaart ist. Piaget unterstellt

(1) Vgl. die Kardinale Theorie ,Abschnitt 3

ganz selbstverständlich, daß das Kind die beliebige Korrespondenz erwirbt, indem es von allen qualitativen Merkmalen abstrahiert, und so die individuellen Elemente, die zuzuordnen sind, einander äquivalent macht.

Diese Interpretation ist schwer nachzuvollziehen, weil für die Entwicklung der Korrespondenzregel keine präzisen empirischen Daten vorliegen. Das betrifft etwa die Frage, welche Gegenstände Kinder unterschiedlichen Alters (zw. 5 und 6 Jahren) für einander "zuordenbar" halten. In welchem Alter das Kind die oben unterschiedenen Formen der Korrespondenz beherrscht, ist auch deshalb schwer einzuschätzen, weil die abstrakte Korrespondenzregel nicht unbedingt aus der qualifizierten Korrespondenz hervorgehen muß. Genau so gut könnten formale Zuordnungen aus sensumotorischen Handlungen des Einander-Zuordnens von Objekten hervorgehen (vgl. Langer, 1979; "pseudo-correspondence"), aus denen das Kind durch reflektierende Abstraktion das Prinzip der Zuordnung herleitet. Die Zuordnung der Elemente zweier Mengen von Objekten könnte daher eine sehr elementare Abbildungsrelation enthalten, deren logische Bedeutung das Kind zudem erwerben kann, wenn es sich allmählich von verschiedenen figurativen Einflüssen bei der Zusammenstellung der beteiligten Gegenstände lösen kann. Die Bedeutung der Korrespondenzrelation für den Begriff der natürlichen Zahl müßte dann aber genauer geklärt werden, da Piaget selbst ja die Abstraktion von qualitativen Merkmalen in der Korrespondenzrelation in enger Analogie zur Entstehung des Zahlbegriffs sieht.

In seinen Bemerkungen zu Piagets Entwicklungstheorie der Zahl unterstreicht McNamara (1975), daß die logische Herleitung des Zahlbegriffs aus einer Synthese der Logik der Klassen und der Seriation (im Rahmen des Gruppierungsmodells) nicht fundiert ist. Zunächst bezweifelt McNamara, daß die Relationen zwischen Zahlen, wie sie etwa für die elementaren arithmetischen Operationen definiert sind, in einer direkten Beziehung zum Verständnis hierarchisch angeordneter Klassen stehen (Piagets Gruppierung I). Klassen von Objekten können gebildet werden, weil die Gegenstände Attribute gemeinsam haben; und das Kind muß nicht

nur dieses Attribut bei jedem Objekt identifizieren, sondern auch eine Vorstellung des übergreifenden Konzepts haben, weshalb die Objekte zusammengehören (vgl. McNamara, 1975, S. 425).

Die Addition von Klassen - die innerhalb der Gruppierung der asymmetrischen Klassenbildung definiert ist (vgl. Flavell, 1963) - beschreibt Zusammenfassungen zwischen hierarchischen Klassen (Piagets liebstes Beispiel sind zoologische Klassifikationen). McNamara (1975, S. 426-427) bemängelt Piagets Ansicht, daß die Addition von Klassen eine direkte Verbindung zur Addition in der elementaren Arithmetik hat.

Piaget leitete diese Wechselbeziehungen aus seinen Untersuchungen zur "additiven Zusammensetzung der Zahlen" oder zu den "arithmetischen Beziehungen des Teils zum Ganzen" ab (Kapitel VIII in Piaget & Szeminska, 1975, S. 242-266).

Drei Untersuchungsmethoden hat Piaget hierbei angewandt, um die Analogie zwischen der Addition der Klassen und der Addition der Zahlen zu demonstrieren. In einer ersten Aufgabe wurde geprüft, ob das Kind versteht, daß eine Menge aus verschiedenen additiven Zusammensetzungen aufgebaut werden kann (z.B. $1 + 5 = 3 + 3 = 2 + 4$ etc.). In einer zweiten Aufgabe legte er dem Kind unterschiedlich große Mengen vor (z.B. 8 und 14) und bat das Kind, die Anordnung, so zu verändern, daß die beiden Mengen gleich groß werden (Piaget spricht von einer "Egalisierungsoperation"). Schließlich bat er, drittens, das Kind eine Menge von Spielsteinen in gleiche Teile zu gliedern.

Piaget begreift die Addition in der Arithmetik als vollständig, wenn "die zu addierenden Teile in einem Ganzen vereinigt werden" und "dieses Ganze als invariant angesehen wird, unabhängig von der Aufteilung seiner Teile" (Piaget & Szeminska, 1975, S. 247). Daher rührt Piagets Deutung, daß das Zusammensetzen einer Zahl aus verschiedenen Teilmengen in Analogie zu einer Addition verschiedener Klassen von Objekten erfolgt. Bei hierarchischen Klassen und bei der Teilmengenbildung findet man nämlich eine intensive Quantifikation, d. h. das Kind erkennt die Größenrelation zwischen den Teilmengen (z.B. $1 < 4$) bzw. zwischen hierarchischen Klassen ($A_1 < B_1$), auch wenn es die genaue numerische Beziehung nicht weiß. Die intensive Quantifikation sieht Piaget als Charakteristikum der logischen Klassen, weil das Kind aus dem Wissen um die hierarchischen Beziehungen zwischen Klassen die Größenrelationen erkennen müßte. Diese intensive Quantifikation stellt sich am deutlichsten in der Aufgabe zur Klasseninklusion

dar, in der das Kind die Beziehungen zwischen einer Teilklasse und einer übergeordneten Klasse beurteilen soll ("sind es mehr Tulpen oder mehr Blumen?" in einer Anordnung aus fünf Tulpen und sechs Rosen). Die intensive Quantifikation der Klasse sieht Piaget als Vorläufer der Bildung von Teilmengen beim Zusammensetzen einer Zahl aus verschiedenen addierten Elementen. Die Addition der Klasse geht der Addition der Zahlen in diesem Sinne in der Entwicklung voraus.

Das reife Verständnis der ersten Aufgabe bei Piaget und Szeminska (s.o.) ist dann gegeben, wenn das Kind jede der Teilmengen zueinander in Beziehung setzen kann, und diese wiederum zu der Gesamtrelation in Relation stellen kann (vgl. $(4 + 4) = (1 + 7) = (8)$).¹ Das Kind hat dann ein operatives System aufgestellt, indem es die Wechselbeziehungen der Teiloperationen, nämlich Addition und Subtraktion, begreift (1). Wie erfolgt aber dann der Übergang von der additiven Komposition der Klasse zur arithmetischen Addition? Er tritt ein, wenn das Kind aus der intensiven Quantifikation allmählich in eine extensive oder numerische Quantifikation übergeht (Piaget und Szeminska, 1975, S. 248).

Die Textstelle, an der Piaget diesen Entwicklungsprozeß beschreibt, ist überaus schwer zu deuten. Kurz gesagt, wird die Addition der Zahlen aber als ein Vorgang vergleichbar der Addition der Klassen gesehen, wobei das Kind gelernt hat von der "qualitativen Individualität" der Teilklassen zu abstrahieren. Die Teilmengen von Zahlen bilden jetzt Einheiten gleicher Rangstufe, die das Kind dann nach numerischen Gesichtspunkten vergleichen kann (Piaget & Szeminska, 1975, S. 248). Numerische Vergleiche schließen z.B. ein, daß das Kind weiß, daß Differenzen zwischen zwei Teilmengen die Gesamtmenge nicht verändern, weil die kleine Teilmenge durch eine zweite größere Teilmenge kompensiert wird.

Piagets Sammlung von Antworten der Kinder bei der "Teilmengenaufgabe" machen den behaupteten Entwicklungsprozeß nicht anschaulich; die Kinder erörtern in seinen wenigen Beispielen zunehmend alle Teilmengen, während bei fehlerhaften Lösungen immer nur eine oder zwei der vier Teilmengen beachtet werden (vgl. Fußnote 1 und die Interpretation von Case (1980) zu dieser Aufgabenstellung).

Piagets Gedankengang ist zwar gut nachzuvollziehen, aber er beruht wie McNamara (1975, S. 426-427) zu zeigen versucht, auf einer künstlich hergestellten Wechselbeziehung zwischen hierarchischen Klassen und Mengen von Objekten. Faßt man Objekte zu einer Menge

(1) Eine ganz ähnliche Aufgabe wurde von Noeltting (1975) überprüft, und von Case (1980) ausführlich diskutiert.

zusammen, z.B. beim Abzählen, sind ihre qualitativen Merkmale völlig bedeutungslos, solange das Kind jedes Objekt als ein abzählbares bzw. zuordenbares Element betrachtet. Piaget unterstellt offensichtlich, daß sich dieser relativ abstrakte Prozeß der Mengenbildung aus einem Abstraktionsvorgang beim Umgang mit Klassen ableitet: abstrahiert das Kind von den qualitativen Merkmalen der Elemente innerhalb der hierarchischen Klassen, so begreift es die Beliebigkeit beim Zusammenstellen der Elemente (die damit zu "Einheiten" werden) und es versteht auch die Beliebigkeit beim Zusammenstellen von Teilmengen (1). Die erkenntnistheoretische Frage, die dieser Konstruktion zugrunde liegt, ist die nach der Bildung einer Einheit, die im Zählvorgang, in arithmetischen Operationen und in der Progression der natürlichen Zahlen ihren Ausdruck findet. Die Beliebigkeit in der Anordnung und operativen Bearbeitung dieser Einheit, die aufzählbar ist und beliebig zu größeren Einheiten zusammengesetzt werden kann (vgl. den Begriff der "Kolligation" von Einheiten bei E. Husserl), konstituiert erst die Flexibilität im Umgang mit den arithmetischen Operationen (vgl. Gal'perin, 1969; Gal'perin & Georgiev, 1969).

Um Objekte zu einer beliebigen Menge zusammenfügen zu können, muß das Kind nur jedes Objekt als "Ding" behandeln, als "unterscheidbares Individuum" (McNamara), das zu den anderen Dingen hinzugefügt oder hinzugezählt werden kann. Keine weiteren Ähnlichkeiten oder Unterschiede muß das Kind erkennen, um eine Menge zu bilden, und es ist leicht zu zeigen, daß Kinder im Laufe des Vorschulalters relativ früh von den qualitativen Merkmalen abzählender Objekte abstrahieren, wenn sie nur verstehen, daß die gezählten Objekte gleichrangig als Elemente behandelt werden müssen (vgl. die Untersuchungen von Gast, 1957; und die Beschreibung des "Abstraktionsprinzips" beim Zählvorgang durch Gelman und Gallistel, 1978). Entscheidend für die Anwendung der arithmetischen Einheiten

(1) Piaget spricht hier vom Prozeß der Egalisierung der Differenzen (Piaget & Szeminska, 1975, S. 248, S. 256). Unterschiedliche, aber komplementäre Teilmengen bilden gleichsam Einheiten, die durch ihre gegenseitige Zugehörigkeit den Unterschied in der Anordnung aufheben.

in Operationen (z.B. der Addition) ist, daß sie quantitativ gleich sind, und genau diese quantitative Beziehung wird bei Klassifikationsoperationen ignoriert (1). McNamara bezweifelt daher, daß die "Klassifikation die Grundlage ist, auf der das Kind seine mathematische Vorstellung einer Einheit aufbaut" (McNamara, 1975, S. 427).

Um die Unvollständigkeit der Logik der Klassen für die Formalisierung des Zahlbegriffs aufzuheben, führt Piaget eine zweite logische Struktur ein, die Seriation (asymmetrische-transitive Relation), die letztlich dazu dient, zwischen den einmal gebildeten arithmetischen Einheiten durch deren Ordnungsbeziehungen untereinander zu unterscheiden.

Piaget untersucht die Bedeutung der Ordnungsbeziehungen anhand von Aufgaben zur Seriation von verschieden großen Gegenständen (z.B. Seriation von Stäben) und Aufgaben zur ordinalen Korrespondenz (z.B. muß das Kind eine Reihe verschieden großer Puppen den Spazierstöcken zuordnen, die ebenfalls in der Größe variieren). Schließlich verwendet er Kardinations- Ordinationsaufgaben, in denen das Kind die Beziehung zwischen Kardinalzahl und Ordinalzahl erkennen muß (z.B. eine Puppe springt über verschieden große Hürden und berührt dabei eine bestimmte Zahl von Matten, die zwischen die Hürden gelegt sind) (vgl. z.B. die Zusammenfassung der Beziehungen von Kardination und Ordination, in Piaget und Szeminska, 1975, S. 194-208).

Obwohl Piagets Versuche sehr anschaulich die Schwierigkeiten des Kindes im Umgang mit ordinalen Beziehungen zeigen, ist die Bedeutung dieser Aufgaben für den Begriff der natürlichen Zahlen nur sehr indirekt ableitbar. Abstrahiert das Kind von den Ordnungsbeziehungen zwischen Objekten bzw. zwischen Klassen von Objekten, wie Piaget unterstellt, bleibt unklar, welche Ordnungsrelation das Kind noch ableiten kann, um zwischen den gleichrangigen arithmetischen Einheiten zu abstrahieren. Zwar kann man eine formelle Ähnlichkeit zwischen den Ordnungsrelationen innerhalb hierarchischer Klassen oder bei Objekten verschiedener Größe und den

(1) Piaget erkennt natürlich diese Schwäche und leitet konsequent her, daß das Kind noch eine weitere logische Relation mit einbezieht, nämlich die Aufreihbarkeit der Elemente (sobald von ihren qualitativen Merkmalen abstrahiert wird). Darauf wird anschließend noch eingegangen.

Relationen zwischen den natürlichen Zahlen erkennen (vgl. McNamara, 1975, S. 429), aber Piagets Ableitung der einen Ordnungsbeziehung aus der Abstraktion einer inhaltlich völlig verschiedenen Ordnungsrelation ist nicht überzeugend.

Die Schwäche der Theorie Piagets sieht McNamara (1975) letztlich in seinem Versuch, die Arithmetik und den Begriff der natürlichen Zahl auf die Logik zurückzuführen. Aber "selbst wenn Arithmetik und Logik formal äquivalent sein würden, könnten wir deshalb nicht schließen, daß die Arithmetik auf die Logik gegründet ist" (McNamara, 1975, S. 425). Schließlich bezweifelt er damit den Wert des formalistischen Ansatzes, für die Entstehung des Begriffs der natürlichen Zahl eine Erklärung zu finden. "Tatsächlich wissen wir, 'wenig über die Natur der psychologischen Elemente und Regeln, die eine Rolle in den arithmetischen Operationen des Kindes spielen'" (McNamara, 1976, S. 898).

3. Kardinale Theorie der Zahlentwicklung

Klassifikatorische Ansätze der Zahl und die kardinale Theorie der Zahlentwicklung werden hier gemeinsam behandelt, um ihre zentralen psychologischen Hypothesen zu erarbeiten. Sowohl in der mathematischen Definition bei Frege als auch in der Axiomatisierung bei Bertrand Russell wird die natürliche Zahl mit der Kardinalzahl identifiziert. Eine Zahl wird als Klasse ähnlicher Klassen definiert, wobei die Ähnlichkeit der Klasse über die Eins-Zu-Eins Korrespondenz (ein-eindeutige Zuordnung) bestimmt wird (Russell, B., 1956, S. 112-113). "Jede Kardinalzahl läßt sich als eine besondere Klasse von Klassen betrachten, nämlich die Klasse all der Klassen zwischen deren Elementen eine Eins-Zu-Eins-Korrespondenz existiert" (Brainerd, 1979, S. 59). Die kardinalen bzw. klassifikatorischen Ansätze versuchen also die natürlichen Zahlen über die Eigenschaft der "Menge" oder "Anzahl" verschiedener Klassen von Objekten zu definieren, wobei äquivalente Klassen nur durch logische Operationen aufgestellt werden (vgl. auch Piaget, 1975, S. 88 ff.).

Die Anzahl der Elemente einer Menge ("numerosity") wird als empirisches Pendant zur logischen Vorstellung der Menge ("cardinality") verstanden. Die natürlichen Klassen der Zahlen (1, 2, 3 ...) sind für die kardinale Theorie nicht mehr lediglich Abstraktionen, sondern existieren als wahrnehmbare Einheiten, insbesondere für die kleinen Zahlen, und werden auf die größeren Zahlen mit Hilfe der symbolischen Darstellung ausgedehnt. Das bedeutet für die größeren Zahlen, daß das Kind auch ein Verständnis für die Einordnung einer Zahl im Zahlssystem haben muß. Die Reihe der Zahlen wird als symbolische Abstraktion behandelt.

Die Problematik der kardinalen Theorie soll im folgenden diskutiert werden; damit wird es zugleich möglich, die psychologischen Annahmen dieser Theorie zu veranschaulichen. Eines der Probleme der kardinalen Theorie liegt gerade in dem Verständnis der "natürlichen" Klassen von Zahlen, die auf der direkten Wahrnehmung kleiner Mengen aufbaut. Zum einen ist es fraglich, ob Kinder selbst die kleinsten Zahlen direkt wahrnehmen können oder sich nicht schon hier auf eine Vielzahl räumlicher Hinweisreize verlassen (z.B. die Größe des Objekts, die Fläche des Hintergrunds, die Helligkeit, etc.). Der Prozeß des "subitizing" (die unmittelbare Wahrnehmung der kleinsten natürlichen Zahlen), der unter anderem von Klahr und Wallace (1973; 1976) als grundlegend für die Zahlentwicklung angesehen wird, ist umstritten. Gelman und Gallistel (1978) gehen davon aus, daß diese unmittelbare Wahrnehmung auf die Automatisierung des Zählens bei sehr kleinen Mengen zurückgeht.

Daneben zeigen die Experimente von Brainerd und Siegel (1978), daß selbst der Bildung der kleinsten "Klassen" von Objektmengen ein perzeptueller Lernprozeß zugrunde liegen muß, wenn die Kinder zwischen verschiedenen mehrdeutigen räumlichen Reizen unterscheiden müssen. Bei größeren Mengen verlassen sich Kinder bei räumlich verteilten Objekten zunehmend auf die wahrgenommene Dichte der Objekte (im Vergleich zu Hintergrundfaktoren), um die Anzahl abzuschätzen.

Die Untersuchung der Fähigkeit von Erwachsenen und Kindern, die Anzahl der Elemente in einer Menge abzuschätzen, hat eine lange

Tradition in der Psychologie (Freeman, 1911; Underwood, 1966) und man kennt eine Vielzahl von Reizfaktoren, die die Genauigkeit des Urteils von Kindern ab dem Vorschulalter und noch bei Erwachsenen beeinflussen (vgl. Brainerd & Siegel, 1978, z.B. Hintergrundfaktoren, Helligkeit, Dichte der Elemente, bedeckte Fläche). Inwieweit "logisch" ursprüngliche Klassen von Zahlen (1, 2, 3 ...) existieren, die der Wahrnehmung direkt zugänglich sind, ist also ungewiß.

Die kardinale Theorie legt ähnlich wie die ordinale Theorie großen Wert auf Wahrnehmungsvorgänge. Die natürlichen Klassen der kleinsten Zahlen ("1", "2", "3") werden durch Wahrnehmungsprozesse definiert. Zugleich wird unterstellt, daß das Kind von diesen elementaren Klassen das Prinzip der logischen Äquivalenz solcher Klassen ähnlicher Klassen abstrahiert, und auf größere Mengen ausweitete. Sowohl das Zählen als auch die Korrespondenzrelation werden in diesen psychologischen Formalisierungen vernachlässigt, obwohl das Kind damit zwei Kontrollstrategien verfügbar hat, die es ihm erlauben, die Gleichheit bzw. Verschiedenheit von Mengen festzustellen. So entdeckt das Kind im Laufe der zunehmenden Verbesserung der Zählfertigkeiten auch das Kardinalzahlprinzip, d.h. das Wissen, daß die letzte abgezählte Zahl die Größe der gezählten Menge wiedergibt (Gelman, 1978; Gelman & Gallistel, 1978;

Interessant ist auch, daß sowohl die psychologischen Experimente zur Abschätzung der Anzahl als auch die logische Definition im Rahmen der kardinalen Theorie auf die Differenz zwischen Mengen abhebt. Vergleichsoperationen, um die Gleichheit von Mengen zu definieren, werden vor allem in psychologischen Ansätzen vernachlässigt. Andererseits werden in der Definition von Bertrand Russell die Klassen äquivalenter Klassen als Kardinalzahlen gebildet, indem eine eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen zweier Mengen von Objekten vorgenommen wird. Der Korrespondenzrelation müßte daher in der psychologischen Ausformulierung der kardinalen Theorie eine zentrale Rolle zukommen (Brainerd, 1979).

Piaget findet in der Russelschen Theorie mindestens zwei Tautologien, die seine Ablehnung des kardinalen Ansatzes begründen.

Einerseits führt Russells Definition dazu, daß "die Zahlen jede für sich erzeugt werden, durch Intervention voneinander unabhängiger Klassen", so daß die operative Struktur des Systems der natürlichen Zahlen (die geordnete Abfolge der Zahlen) nicht berücksichtigt wird (Piaget, 1975, S. 90). Zum anderen bewirkt die Herleitung der Kardinalzahl aus der "beliebigen (mathematischen) Zuordnung", daß die Kardinalzahl durch eine numerische Operation quantifiziert wird (nämlich die Eins-Zu-Eins-Korrespondenz), d. h. die angebliche logische Definition enthält einen Zirkel.

Diese Annahme Piagets geht darauf zurück, daß er die eindeutige qualitative Zuordnung als "elementarer" (vgl. Piaget, 1975, S. 91-93) betrachtet als die beliebige Eins-Zu-Eins-Korrespondenz. Die beliebige Zuordnung erlaubt die Definition einer extensiven Quantität, d. h. der qualitativen Beziehung zwischen den komplementären Teilen eines Ganzen: "... dadurch daß sie die Eigenschaften der betrachteten Elemente durch Abstraktion eliminiert, transformiert sie diese in numerische Einheiten" (Piaget, 1975, S. 92). Das bedeutet, die "Bildung" von Klassen von ähnlichen Klassen (in Russells logischer Definition) über die ein-eindeutige Zuordnung führt den Begriff der Einheit in die Klasse ein, und kommt damit ganz selbstverständlich auf die Zahl. Piaget bezweifelt aber, ob es sich dann noch um rein logische Klassen handelt, und nicht vielmehr um "Mengen von Einheiten, d. h. von numerischen Klassen" (Piaget, 1975, S. 93).

Russell definiert weiter die Ordinalzahl über Mengen von "ähnlichen" asymmetrischen Relationen, d. h. eineindeutige Zuordnungen zwischen Relationen von Mengen. Wiederum führt hier die Definition der Relation abstrahiert vom beliebigen Inhalt dieser Relation zu einer "rein mathematisch geordneten Folge, die daher den Begriff der Ordinalzahl schon impliziert" (Piaget, 1975, S. 93). In anderen Ansätzen der kardinalen Theorie (z.B. Bartley & Nelson, 1961) wird die ordinale Bedeutung des Zahlkonzepts nicht besonders erwähnt, was für Brainerd (1979) ein besonders schwerwiegender Mangel ist.

Wie alle Theorien der Zahlentwicklung hat die kardinale Theorie besondere Schwierigkeiten mit der Operationalisierung der angenommenen logischen Prozesse. Hier geht es in erster Linie um die Operationalisierung der Ähnlichkeitsrelationen zwischen Mengen von Objekten. Dabei wird versucht - dies ist besonders wichtig - die Anzahl nicht über numerische Einheiten zu definieren (z.B. Abzählen gleicher Einheiten), sondern eine logische Definition der

"Ähnlichkeit" bzw. der "Unterschiedlichkeit" zu geben. Diese logische Fassung der Ähnlichkeit kann sich sowohl in der "Zahlwahrnehmung" ausdrücken als auch über Korrespondenzrelation erfaßt werden. Möglicherweise entwickelt das Kind mit der Korrespondenzstrategie eine numerische Einheit, um Mengen zu vergleichen (im Gegensatz zu den Behauptungen Piagets).

Die große Zahl empirischer Studien zeigen, daß das Kind sich sowohl in statischen Kardinationsaufgaben (in denen Mengen einander gegenüberstehen) (Brainerd, 1977) als auch in Kardinationsaufgaben, in denen Transformationen einer Menge stattfinden (Zahl-invarianzaufgabe; P.H. Miller, 1978) auf verschiedenartige räumliche Hinweisreize verläßt, wobei das Hervortreten einer bestimmten Dimension (z.B. die Länge) und ihre Relation zu anderen beteiligten Dimensionen von großer Bedeutung ist. Brainerds Aufgabe zur Kardination prüft im Grunde nur die Fähigkeit des Kindes, von Länge und Dichtereizen in einer statischen Mengenanordnung (zwei Mengen von Spielsteinen sind parallel zueinander angeordnet) zu abstrahieren, bzw. diese Reizdimensionen so zueinander in Beziehung zu setzen, daß sie eine angemessene Abschätzung der Menge erlauben. Inwiefern das Kind bei einer solchen statischen Anordnung auch Korrespondenzbeziehungen beachtet, ist bislang nicht untersucht worden, obwohl diese Aufgabe vorgeblich das Verständnis des Kindes für Eins-Zu-Eins bzw. Eins-Zu-Viele Relationen zwischen Mengen prüfen soll.

Daneben stellt sich die Frage, wie die geordnete Folge der natürlichen Zahlen durch die kardinale Theorie erfaßt wird. Für diesen letzten Aspekt sind Formulierungen der kardinalen Theorie, die eine psychologische Operationalisierung der "Progression" erlauben, nicht zu finden (vgl. Brainerd, 1973).

4. Relationale/ordinale Theorien der Zahlentwicklung

Relationale Theorien des Zahlbegriffs befassen sich in erster Linie mit der Eigenschaft der "inneren Ordnung" der natürlichen Zahlen. Die axiomatischen Ansätze bei Dedekind und Peano

identifizieren die natürlichen Zahlen mit den Ordinalzahlen. Im Prinzip bilden danach die natürlichen Zahlen eine Folge, die dadurch entsteht, daß ein konstantes Gesetz auf das unmittelbar vorhergehende Element angewandt wird. In den Axiomen von Peano wird, ausgehend von drei undefinierten Konzepten, nämlich "Null", "endliche Zahl" und "Nachfolger", anhand von fünf Axiomen die Vorstellung einer einfachen unendlichen Folge deduktiv hergeleitet. In anschaulicher Form lauten die Axiome (für eine mathematische Fassung, z. B. Reinhardt & Soeder, 1978, S. 53):

- (1) 0 ist eine natürliche Zahl;
- (2) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine natürliche Zahl n' als Nachfolger von n ;
- (3) 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl;
- (4) Natürliche Zahlen mit gleichen Nachfolgern sind gleich;
- (5) Enthält eine Teilmenge M von $\mathbb{N}$ (= Menge der natürlichen Zahlen) die Zahl 0 und mit jeder natürlichen Zahl auch deren Nachfolger, so ist $M = \mathbb{N}$ (zitiert nach Reinhardt & Soeder, 1978, S. 53).

Das Axiom (5) begründet das Beweisverfahren der vollständigen Induktion, das für die Mathematik zentrale Bedeutung hat. In anderer Fassung lautet das Axiom (5) daher auch: "Eine Eigenschaft, die der Null und mit jeder natürlichen Zahl auch deren Nachfolger zukommt, kommt allen natürlichen Zahlen zu" (Reinhardt & Soeder, 1978, S. 53).

Eine zweite Fassung der ordinalen Theorie kommt in den Axiomen von v. Neumann zum Ausdruck. Aufbauend auf einer einfachen Vorstellung der Ordnung behandelt v. Neumann die ordinalen Zahlen wie eine geordnete Reihe von beliebigen Symbolen. Die gesamte ordinale Sequenz läßt sich konstruieren aus dem Nullsymbol und der definierten Ordnungsbeziehung. Diese induktive Definition der natürlichen Zahlen erlaubt die Bestimmung jeder beliebigen natürlichen Zahl aus einer endlichen bereits vorliegenden ordinalen Sequenz (vgl. Brainerd, 1973, S. 233-235).

B. Russell kritisierte zu recht, daß diese axiomatischen Fassungen des Zahlbegriffs jede einfache endliche Folge abbilden können (das gilt insbesondere für die Peano-Axiome). Die relationalen Definitionen der natürlichen Zahlen sind daher nicht kategorial, d. h.

sie enthalten keine spezifischen Kennzeichnungen der Eigenart der natürlichen Zahlen im Unterschied zu anderen Folgen (Brainerd, 1973). Zudem erlauben es die Peano-Axiome wegen dieser Mehrdeutigkeit nicht, den natürlichen Zahlen eine konkrete Bedeutung zu geben. Schließlich macht es auch einige Probleme, wie das erste Element (Null oder 1) in die Folge der natürlichen Zahlen eingeführt wird. Brainerd selbst sieht die mangelnde Kategorialität der relationalen bzw. ordinalen Theorien eher als eine Stärke denn als Schwäche dieser Ansätze. Die Ähnlichkeit zwischen geordneten Folgen in der "Realität" und der Folge der natürlichen Zahlen ist dabei ein Ausdruck der Isomorphie zwischen Realität und mathematischem Modell. "... befriedigende Theorien grundlegender mathematischer Konzepte, wie die Zahl, sind nichtkategorisch im Hinblick auf empirische Gegenstände der idealisierten Konzepte, auf der diese Theorien beruhen" (Brainerd, 1973 , S. 247).

Die psychologischen Deutungen der ordinalen Theorie betonen das Verständnis des Kindes für transitive und asymmetrische Relationen innerhalb einer geordneten Folge. Brainerds Theorie versucht die relationale Theorie aufzugreifen. Zahlen sind demnach "in ihrem grundlegendsten Sinn, Mittel um die Elemente einer Folge zu repräsentieren, die solche Relationen (nämlich asymmetrische-transitive Relationen) erzeugen" (Brainerd, 1979, S. 100). Vergleichbar zur kardinalen Theorie sieht die ordinale Theorie die Voraussetzung für das Konzept der Ordination in grundlegenden Wahrnehmungsprozessen. Die wahrgenommene Ordinalität, d. h. die Alltagswahrnehmung asymmetrischer und transitiver Beziehungen, die Wahrnehmung von Ordnungsbeziehungen zwischen mehreren Objekten, ist die "vornumerische Wahrnehmungsgrundlage", von der sich das Zahlkonzept herleitet. Durch die Verinnerlichung der wahrgenommenen Ordnungsbeziehungen entsteht das Konzept der Ordination, das die Fähigkeit erfaßt, Anordnungen von drei oder mehr Elementen nach einer bestimmten Dimension zu ordnen, und zwar auch dann, wenn die bestehende Ordnungsrelation nicht unmittelbar beobachtbar ist (z.B. bei optischer Täuschung) (Brainerd, 1979).

Das Zahlkonzept selbst leitet sich wiederum aus dem Konzept der Ordination her. Anhand der geordneten Darstellung asymmetrisch-

transitiver Beziehungen erwirbt das Kind eine grundlegende Vorstellung der logischen Ordnungsbeziehungen, die es dann im Rahmen der Zahlenfolge weiterführen kann (z.B. auch durch die Symbolisierung der geordneten Abfolge). Die arithmetischen Operationen erlernt das Kind aufgrund seiner Weiterentwicklung des Konzepts der Ordination innerhalb des Systems der natürlichen Zahlen. Die Definition der Anzahl der Elemente in einer Menge sieht Brainerd (1979) über die Korrespondenzrelation gegeben, die zwischen den Elementen zweier Mengen, die systematisch aufgereiht sind, hergestellt wird. Die Korrespondenzrelation hat für die ordinale Theorie jedoch nur untergeordnete Bedeutung.

Wie bei der kardinalen Theorie findet sich hier das zentrale Problem der Operationalisierung, speziell des Konzepts der Ordination. Bei welchen inhaltlichen Aufgabenstellungen wird das Verständnis der asymmetrisch-transitiven Relationen am angemessensten geprüft? Piaget selbst und andere Forscher, die seine Theorie nachzuprüfen suchten, haben sich vorwiegend mit dem Verständnis des Kindes für die Transitivität der Länge (in Seriationsaufgaben und speziellen Aufgaben zur Transitivität der Länge) befaßt. Inwieweit die behaupteten logischen Prozesse in diesen speziellen Aufgaben widergegeben sind, ist bislang nicht hinlänglich geklärt (z.B. Smedslund, 1969; Flavell, 1977; Moore, 1979).

Analog zum Konzept der Kardination wird die Entwicklung des Konzepts der Ordination aus der Wahrnehmung entsprechender Umweltrelationen hergeleitet. Die Theorie stellt sich damit in deutlichen Gegensatz zu Piagets erkenntnistheoretischer Position, die der Wahrnehmung stets nur eine untergeordnete Rolle für die Entwicklung zugewiesen hat. Für Piaget entsteht das Konzept der Transitivität bzw. der Seriation aus der Koordination von Handlungen, die das Kind beim Vergleichen verschiedener Objekte ausführt. Eine Abstraktion einer logischen Relation aus der Wahrnehmung, in der sie sozusagen "implizit" gegeben ist, hält Piaget dagegen aus erkenntnistheoretischen Gründen für unwahrscheinlich.

5. Untersuchungen zur empirischen Gültigkeit der drei Theorien

Zur Überprüfung der empirischen Gültigkeit der drei referierten Zahltheorien lassen sich die Entwicklungsbeziehungen zwischen verschiedenen Klassen von Aufgaben heranziehen. Dazu gehören selbstverständlich Aufgaben zur Ordination und Kardination; daneben Aufgaben, die entweder die arithmetischen Fertigkeiten des Kindes (Fertigkeiten in elementaren arithmetischen Operationen) oder sein Verständnis des Zahlbegriffs (indiziert durch die Zahlinvarianzaufgabe) abbilden; schließlich Aufgaben zur Klassifikation und Klasseninklusion, denen für Piagets Theorie einiges Gewicht zuzählt.

5.1 Untersuchungen, die die ordinale Theorie unterstützen:

Für die Beziehungen zwischen Ordination, Kardination und arithmetischen Fertigkeiten (bzw. dem Zahlbegriff) hat Brainerd (1973, S. 250-253; 1979, S. 116-128) wichtige Untersuchungen zusammengetragen, so daß deren Darstellung hier sehr kurz bleiben kann. Die klassischen Studien von Piaget und Szeminska (1975) erlauben keine detaillierten Schlußfolgerungen über die Entwicklungsbeziehungen zwischen den genannten Aufgabenklassen, weil sich Piagets Interpretationen weitgehend auf qualitative Ähnlichkeiten in der strukturellen Entwicklung verschiedener Aufgaben stützt und er keine empirischen Vergleiche mehrerer Aufgaben bei den gleichen Kindern heranzieht (intrasubjektive Vergleiche). Anfang der 60er Jahre wurden mehrere Replikationen der Arbeiten Piagets unternommen (Dodwell, 1960, 1961, 1962; Beard, 1963; Hood, 1962). In diesen Untersuchungen wurden die klassischen Aufgaben von Piaget (Seriation, Korrespondenzaufgaben, Zahlinvarianz) aufgegriffen und unter anderem ihre mögliche Beziehung zu arithmetischen Fertigkeiten von Kindern zwischen 5 und 8 Jahren verfolgt. Die Eigenart dieser Studien ist allerdings, daß sie die Entwicklungsbeziehungen zwischen den beteiligten Aufgaben nicht präzise prüfen und relativ allgemeine Korrelationen zwischen der zusammengefaßten Leistung in verschiedenen Piagetaufgaben und arithmetischen Fertigkeiten berichteten. Zusammengefaßt sprechen die genannten Untersuchungen dafür, daß "es eine positive statistische

Beziehung geben kann zwischen der arithmetischen Kompetenz von Kindern und ihrem Verständnis der Ordination oder der Kardination, oder beiden" (Brainerd, 1979, S. 120). Präzise Angaben über Entwicklungsbeziehungen finden sich nicht.

Linda Siegel prüfte die Beziehungen zwischen verschiedenen elementaren mathematischen Konzepten bei 77 Kindern zwischen 3;0 und 4;11 Jahren mittels einer Apparatur zum programmierten Lernen. Kriterium für das Verständnis einer Aufgabe waren 9 von 10 aufeinanderfolgende korrekte Reaktionen auf das vorgegebene Konzept (Siegel, 1971, S. 359).

Die sieben Aufgaben waren: Diskrimination einer kontinuierlichen Größe (Flächenunterschied); Diskrimination einer diskreten Größe (zwei Mengen unterschiedlicher Anzahl); Äquivalenz (Wahl der gleichen Menge); Erhaltung (Wahl der gleichen Menge trotz irreführender räumlicher Reize); Ordination (Wahl des zweiten Bildes in der Reihe); Seriation (Wahl des mittelgroßen Bildes); Addition (Wahl einer Menge, die zwei Steine mehr hat).

Die ersten drei der genannten Aufgaben fielen den Kindern in etwa gleich schwer. Die Äquivalenzaufgabe war verständlicherweise einfacher zu lösen als die Erhaltungsaufgabe. Schließlich brauchten die Kinder mehr Lerndurchgänge für die Ordinationsaufgabe als für die bisher genannten Aufgaben (1 bis 4), während die Ordinationsaufgaben der Seriations- und der Additionsaufgabe vorausging. Die beiden letzten Aufgaben fielen den Kindern in der untersuchten Altersgruppe überaus schwer (Siegel, 1971, S. 361).

Obwohl diese Ergebnisse der ordinalen Zahltheorie entsprechen (zwei ordinale Konzepte fallen dem Kind leichter als ein arithmetisches), ist Brainerds Deutung der Arbeit nicht überzeugend (Brainerd, 1979, S. 121). Die besonderen Schwierigkeiten, die die Kinder mit der Additionsaufgabe hatten (Siegel berichtete, durchschnittlich 73 Durchgänge von 80 seien notwendig, bis das Konzept vom Kind erworben ist; darunter fällt sicher ein großer Teil von Kindern, der in dieser Altersgruppe die Aufgabe überhaupt nicht bewältigte), sind vielleicht auf die besondere Aufgabenstellung zurückzuführen. Kinder dieses Alters haben besondere Schwierigkeiten, Mengenunterschiede größer als Eins einzuschätzen (vgl. Gelman & Gallistels (1978) Darstellung zum "Lösbarkeitsprinzip", und Greenos (1980) Diskussion der Schwierigkeiten, die Kinder mit

der Frage haben, wieviele Objekte eine Menge mehr habe als die andere).

Linda Siegel (1974) prüfte die Theorie Brainerds anhand von Aufgaben zum Mengenvergleich bei Karten mit 2 - 9 Gegenständen. Die Anwendung einer Ordnungsoperation zwischen verschieden großen Mengen fiel den Kindern ($N = 91$; Alter 3;5 bis 5;0 Jahre) leichter als der Vergleich von Mengen über das Korrespondenzkonzept. Im letzten Fall mußte das Kind eine gleichgroße Menge finden, wobei z.T. irreführende räumliche Reize eingeführt waren. Die Länge einer Anordnung von Objekten unterstützte Urteile des Kindes, in denen es zwei Mengen vergleichen sollte. Dagegen war die Länge nicht hilfreich, wenn das Kind eine gleich große Menge finden sollte. Länge ist jedoch keineswegs der einzige Reizaspekt, den die Kinder dieses Alters beachten. Obwohl die Kinder in manchen Aufgabensituationen Schwierigkeiten haben, Länge und Zahl als zwei getrennte Dimensionen zu betrachten und so die Informationen aus beiden Dimensionen zusammen zu berücksichtigen, wenn sich Längenreize und Anzahl widersprechen (eine kurze Reihe mit sehr vielen Gegenständen), ist Länge für sich genommen kein eindeutiger Reiz, nachdem die beobachteten Kinder die numerische Menge abschätzen. In welchem Maße diese Ergebnisse die ordinale Theorie stützen, ist unklar, weil die Kinder bei kardinalen Vergleichen im Grunde drei Reizanordnungen mit unterschiedlichen räumlichen Informationen zueinander in Beziehung setzen mußten, so daß die Aufgabe schon deshalb schwerer fallen muß als der Vergleich zweier Mengen.

Brainerd deutet auch das Ergebnis von Wang et al. (1971), daß das Zählen als Vergleichsstrategie für Mengen dem Kind vertrauter ist als die Eins-Zu-Eins Korrespondenz (d. h. eine kardinale Operation) im Sinne der ordinalen Theorie.

Brainerds eigene Untersuchungen prüfen die Entwicklungsbeziehungen zwischen den Konzepten der Ordination, der Kardination und arithmetischen Fertigkeiten des Kindes. Ordinations- und Kardinationsaufgaben konstruiert Brainerd anhand der "minimalen notwendigen Bedingungen" für das jeweilige Konzept. Ordination umfaßt die Definition einer asymmetrisch-transitiven Beziehung zwischen

mindestens drei Elementen. Kardination wird über die Korrespondenzrelation definiert, die die Ähnlichkeit bzw. Unterschiedlichkeit zweier Mengen bestimmt (vgl. Brainerd, 1973 , S. 253-255).

In seiner ersten Untersuchung prüfte Brainerd die Entwicklungsbeziehung zwischen der Ordinationsaufgabe (Längentransitivität) und der Kardinationsaufgabe (Vergleich statisch angeordneter Mengen) bei 180 Kindern aus dem Kindergarten und der 1. Klasse (vgl. Brainerd, 1973 , S. 255-265; Brainerd, 1979, S. 133-144). Für jede der Aufgaben wurden drei Stadien definiert und die Entwicklungsfolge anhand einer Kreuztabelle geprüft. Die Ordination ging der Kardination deutlich voraus. Daraus schließt er, "daß die Ordnungsoperation der Korrespondenzoperation im Denken von Kindern vorausgeht" (Brainerd, 1973 , S. 265).

Die zweite Untersuchung zog zu den bisher geprüften Aufgaben noch die arithmetischen Fertigkeiten heran, um einen Indikator des kindlichen Verständnisses der natürlichen Zahlen zu haben (Brainerd, 1973 , S. 265-274; Brainerd, 1979, S. 144 - 150). Erneut wurden 180 Kindern aus Kindergarten und 1. Klasse Ordinationsaufgaben gestellt. Daneben wurden die arithmetischen Fertigkeiten anhand einfacher Additions- und Subtraktionsaufgaben beobachtet. Die Entwicklungsbeziehungen zwischen Ordinationsaufgabe und Kardinationsaufgabe wurde bestätigt. Drei Niveaus für die arithmetischen Fähigkeiten setzte Brainerd in Beziehung zu den Stufen der Kardinations- und Ordinationsaufgabe. Ordination geht eindeutig den arithmetischen Fertigkeiten voraus, während Kardination ihnen nachfolgt. Damit ist die Sequenz Ordination $\rightarrow$ arithmetische Fertigkeiten $\rightarrow$ Kardination relativ gut bestätigt. Ob eine Aufgabe, die der anderen in der Entwicklung vorausgeht, auch als "notwendige Vorbedingung" dieser zweiten Aufgabe angesehen werden kann, bleibt damit natürlich offen.

Brainerd und Fraser (1975) betrachten erneut die Entwicklung von Ordinationsaufgaben und Kardinationsaufgaben. Statt der arithmetischen Aufgaben wurde Piagets Zahlinvarianzaufgabe als Kriterium des Zahlbegriffs verwendet. Zusätzlich wurde das Verständnis des Kindes, Objekte nach dem Merkmal der Zahl (z.B. Kärtchen auf denen 4 bzw. 6 Gegenstände abgebildet sind) zu klassifizieren,

herangezogen. Für die beobachtete Gruppe von 100 Kindern aus Kindergarten und 1. Klasse berichteten Brainerd und Fraser (1975), daß Zahlinvarianz- und Klassifikationsaufgabe nach Zahlen in etwa gleichzeitig von Kindern diesen Alters beherrscht werden. Ordination geht der Zahlinvarianz in der Entwicklung voraus, Kardination folgt ihr nach.

Seltsamerweise ist die Entwicklungsbeziehung zwischen Ordination und Kardination in der Arbeit von Brainerd und Fraser (1975, S. 29) nicht eindeutig interpretierbar, entgegen der Darstellung von Brainerd. Das liegt daran, daß der größte Teil der Kinder auf dem Niveau I der Kardinationsaufgabe bleibt (83 %). Eine Nachprüfung der Kreuztabelle von Brainerd und Fraser (1975, S. 29, Tabelle 1) mittels der Vorhersageanalyse (Froman & Hubert, 1980) ergibt keine Unterstützung für die Entwicklungspriorität der Ordination (der χ^2 -Wert ist negativ, die Vorhersage also schlechter als der Zufall).

Die Untersuchung von Entwicklungsbeziehungen bzw. Entwicklungsprioritäten ist in zweierlei Ansicht anfällig. Einmal entscheidet die gewählte Stichprobe darüber, ob alle Niveaus einer Aufgabe angemessen vertreten sind. Konzentrieren sich die Antworten der Kinder auf ein bestimmtes Niveau (z.B. "ceiling"-Effekt), läßt sich die Entwicklungsrelation zu einer anderen Aufgabe nicht zuverlässig prüfen (vgl. Light, 1973).

Zweitens beeinflußt die Definition der Niveaus einer Aufgabe erheblich die beobachtbare Wechselwirkung zweier Aufgaben; die Zuordnung einer bestimmten Anzahl von Urteilen zu einem Niveau ist u. U. relativ beliebig, kann aber an qualitativen Eigenarten einer Aufgabe vorbeigehen. Beispielsweise ist Brainerd & Frasers (1975) Aufgabe "Klassifikation nach der Zahl" (number as class) zuvor kaum untersucht worden, so daß typische Antwortstrategien der Kinder nicht bekannt sind. Ein Indiz für eine problematische Aufteilung einer Aufgabe nach Niveaus ist z. B. die Seltenheit eines gewissen Niveaus bei relativ guter Stichprobenwahl. Welche Bedeutung muß man der Tatsache zumessen, daß in der genannten Aufgabe Niveau 2 (es beinhaltet eine korrekte Klassifikation nach der Zahl im letzten von vier Durchgängen) relativ selten ist. Es bleibt sehr sinnvoll, Aufgabenniveaus zu bilden, um qualitativen Zusammenhängen zwischen kognitiven Leistungen nachzuspüren, aber man muß sich bewußt machen, daß wir qualitative Veränderungen in

der Lösungsmethode von Kindern oft nur unzulänglich erfassen können (bzw. zum großen Teil nicht näher untersucht haben) (vgl. dazu Fischer, 1980). Schließlich gibt es unterschiedliche Lösungskriterien - wobei Brainerd nur kognitive Urteile von Kindern heranzieht -, die die Häufigkeit von Aufgabenniveaus beeinflussen.

Jedes der soeben diskutierten Probleme läßt^{sich} bei der Replikation der Arbeit Brainerds durch Gonchar (vgl. Bingham-Newman & Hooper, 1975; Brainerd, 1979, S. 150-154) beobachten. Untersucht wurden 60 Kindergarten-Kinder ($\bar{x} = 5;10$) und 60 Kinder der 3. Klasse ($\bar{x} = 8;11$). Innerhalb der jeweiligen Altersgruppe sind die Häufigkeiten einzelner Niveaus so gering, daß die Entwicklungsbeziehungen nur begrenzt an der Kreuztabelle abzulesen sind (1). Dennoch bestätigt sich u. a. die behauptete Reihenfolge in der Entwicklung: Ordinationsaufgabe $\rightarrow$ arithmetische Fertigkeiten $\rightarrow$ Kardination, soweit nur die kognitiven Urteile des Kindes für die Analyse übernommen werden. Wertet man die Ergebnisse nach den Kriterien Piagets aus, zieht also auch die Erklärungen des Kindes hinzu, sind die "Entwicklungsabstände" zwischen Ordination, Zahlinvarianz und Kardination aber weniger eindeutig. Brainerd (1979, S. 154) begründet dies aus der "konservativen" Meßmethode; er unterstellt damit aber, daß es sich hier nur um eine Frage des Meßfehlers handelt, während tatsächlich das Problem der Reaktionskriterien bei kognitiven Aufgaben noch keineswegs zufriedenstellend gelöst ist (Kuhn, 1974; Patterson, 1978).

Zusammenfassend: die verschiedenen Untersuchungen Brainerds zeigen - sieht man einmal von der Frage der Operationalisierung und methodischen Problemen ab - eine systematische Entwicklungsfolge: Ordinationsaufgabe (=asymmetrische transitive Beziehung) $\rightarrow$ Verständnis der natürlichen Zahl (arithmetische Fertigkeiten; Zahlinvarianz)

(1) Zum Beispiel zeigt die Reanalyse von Tabelle 8.6 (Brainerd, 1979, S. 152), daß die Kreuztabelle aus Ordination- und Kardinationsaufgabe für Kinder der 3. Klasse die Entwicklungspriorität der Ordination nur knapp unterstützt ($\chi^2 = 0,572$, $U = 0,0394$, $Z = 2,04$, $p < 0,05$). Der kleine U-Wert zeigt, daß in den für die Bewertung der Entwicklungsbeziehung wichtigen Zellen der Kreuztabelle nur wenige Antworten erwartet werden (aufgrund der Marginalien).

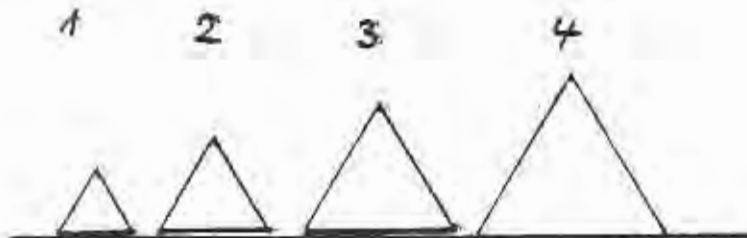
→ Kardination (Mengenvergleich durch die Korrespondenzrelation). Wie schon betont, muß diese Reihenfolge nichts darüber besagen, ob eine Aufgabe logisch notwendig der anderen vorausgehen muß oder sogar ihre Entwicklung mitbedingt. Dennoch interpretiert Brainerd diese Ergebnisse als Bestätigung für die ordinale Theorie der Zahlentwicklung.

Daneben liegen drei Trainingsstudien vor, die die ordinale Position unterstützen. Die erste (Brainerd, 1973 a, vgl. auch Brainerd, 1979, S. 157-166) versuchte den Einfluß ordinaler bzw. kardinaler Instruktion auf die arithmetischen Fertigkeiten von Kindern zu untersuchen, die gerade in die Schule gekommen waren. Während Übungen, die die inneren Ordnungsbeziehungen betonten, erheblichen Einfluß auf die arithmetischen Fähigkeiten der Kinder hatten, zeigte das Training im systematischen Vergleich von Mengen keine solche Wirkung.

Im zweiten Experiment (Brainerd, 1974a, vgl. Brainerd, 1979, S. 166-179) wurde versucht, 120 Kindergarten Kindern ($\bar{X} = 4;7$) die ordinale oder die kardinale Bedeutung der ersten fünf Zahlen zu vermitteln. Für die kardinale Bedeutung wurden die Ziffern (1 - 5) mit gleichgroßen Mengen gepaart. In den ordinalen Aufgaben wurden die Zahlen mit der Position einer systematisch geordneten Folge von verschiedenen großen Gegenständen verbunden. Die Studie zeigte, daß diese Trainingsprozedur relativ erfolgreich ist. Zudem erwarben Vorschulkinder die ordinale Bedeutung der Zahlen wesentlich schneller und leichter als die kardinale. Leider erörtert Brainerd nicht, daß das Kind für den Erwerb der ordinalen Bedeutung sein Wissen über den Zählvorgang heranziehen durfte, und so die geordnete Folge der natürlichen Zahlen (die die meisten Kinder dieses Alters mit Sicherheit kennen) mit den Ziffern in Verbindung bringen kann. Natürlich kann man argumentieren, Zählen sei auch eine ordinale Strategie, aber der Zählvorgang bestimmt eine eigene innere Ordnungsbeziehung, die mit den asymmetrischen Beziehungen zwischen Gegenständen nicht unmittelbar zusammenhängen muß. Möglicherweise hilft dem Kind beim Erwerb der ordinalen Bedeutung in Brainerds Aufgabe gerade die innere Ordnung der Zahlen (s. Abb. A). Das Kind bildet eine ordinale Korrespondenz zwischen geordneter

Zahlenfolge und den systematisch geordneten Gegenständen.

Abbildung A:



In der Untersuchung von Clothiaux (1978) wurden Kinder, die gerade in die Schule eingetreten waren, drei Instruktionsgruppen zugeordnet. Die ordinale Instruktion schloß Manipulation von Gegenständen unterschiedlicher Größe und Zählerfahrungen ein; die kardinale Instruktion betonte den Vergleich von Mengen und die gleichzeitige Einführung von Ziffern; schließlich enthielt die "gemischte" Instruktion Aufgaben und Übungen aus den beiden zuerst genannten Instruktionsplänen. Eine vierte Gruppe diente als Kontrollgruppe. Als Kriterien für den Erfolg der Instruktion dienten Aufgaben zur Ordination und Kardination, die Zahlinvarianzaufgabe und einfache arithmetische Aufgaben (Addition und Subtraktion). Obwohl die Ergebnisse die größere Wirksamkeit der ordinalen Instruktion auf die arithmetischen Fertigkeiten des Kindes zeigen, sind die Auswirkungen des Trainings auf die anderen Kriteriumsaufgaben eher bescheiden, was aus der relativ kurzen Trainingszeit verständlich wird.

Obwohl eine Reihe von Studien die ordinale Theorie unterstützen, ist die Frage der Operationalisierung der Konzepte der Ordination und Kardination noch nicht hinreichend geklärt. Daher ist offen, ob die geringere Schwierigkeit, die Kinder mit ordinalen Konzepten und Aufgaben haben, eine Folge spezifischer Aufgabenfaktoren ist, oder ob das Konzept der Ordination tatsächlich eine logische und/

oder entwicklungslogische Priorität besitzt.

5.2. Empirische Prüfung der Theorie Piagets:

Für die Überprüfung der Theorie Piagets dienen Studien, die die Entwicklungsabfolge von Aufgaben zur Seriation/Transitivität, zur Zahlerhaltung und zur Klassifikation/Klasseninklusion verfolgen. Für Piaget entstehen diese Entwicklungsbereiche logisch und entwicklungsmäßig parallel zueinander. Untersuchungen, die Kindergarten- und Schulkindern Aufgaben aus den logischen Bereichen darboten, bestätigten nur selten eine solche Parallelität in der Entwicklung (vgl. Brainerd, 1978, S. 186-188). Diagnostische Fragen sind mit der Absicherung solcher Entwicklungsverläufe aber untrennbar verwoben. Faktoren, die die Beziehungen in erster Linie beeinflussen, sind die untersuchte Altersgruppe (wie gut sind die Entwicklungsniveaus einer Aufgabe repräsentiert?), die Aufgabenfaktoren, die die kognitive Leistung des Kindes beeinflussen (welche inhaltlichen Bereiche spricht die Aufgabe an?, vgl. "relative task sensitivity", Hooper, Toniolo & Sipple, 1978) und die Reaktionskriterien (in welchem Maße werden Urteile und/oder Erklärungen bei der Bewertung herangezogen?).

Für jede der genannten Piagetaufgaben sind die Wirkungen solcher diagnostischer Faktoren ausgiebig dokumentiert (vgl. Brainerd & Hooper, 1975, 1978); für die Seriation (vgl. Braine-Smedslund-Debatte, Smedslund, 1969) und die Transitivität; für die Zahleninvarianz (P.H. Miller, 1978; S.A. Miller, 1976); und für die Klassifikation und die Klasseninklusion (Winer, 1980). Viele dieser diagnostischen Faktoren, haben einen erheblichen Einfluß auf die Lösungshäufigkeit einer bestimmten Aufgabe in verschiedenen Altersgruppen, so daß in der Literatur jede mögliche Sequenz zwischen den drei Aufgabenklassen zu finden ist. Beispielsweise existieren sowohl Studien, die eine parallele Entwicklung von Klasseninklusion und Invarianzkonzepten als auch Arbeiten in denen Klasseninklusion der Invarianz vorausgeht; und zusätzlich Untersuchungen, in denen die Invarianz der Klasseninklusion vorausgeht (Winer, 1980, S. 318-319). Zwar ist die letzte der drei

möglichen Sequenzen am häufigsten belegt, aber die Bedeutung verschiedener Aufgabenfaktoren ist im Grunde ein Indiz, daß die kognitiven Entwicklungsaufgaben "in verschiedenen Lebensaltern unterschiedliche Fertigkeiten oder Prozesse repräsentieren" (Winer, 1980, S. 325). Es macht deshalb wenig Sinn, die Zahl der Untersuchungen auszuzählen, die eine bestimmte Sequenz von Entwicklungsaufgaben belegt, solange die diagnostische Frage noch so unklar beantwortet ist (vgl. dazu Larsen, 1977).

Es ist aber ein Verdienst Brainerds durch die Wahl konsistenter Kriterien für verschiedene Piaget-Aufgaben die Stabilität einer bestimmten Entwicklungssequenz belegt zu haben. Achtet man darauf, ähnliche inhaltliche Bereiche zu vergleichen (z.B. Längentransitivität, Längeninvarianz, Klasseninklusion der Länge (1)) und besteht auf gleichen Konzeptkriterien (bei Brainerd stets nur das kognitive Urteil des Kindes), ist die Ordnung der Bewältigung der drei Aufgabenbereiche konsistent: transitive Schlußfolgerung/Seriation → Invarianz → Klasseninklusion (z.B. Brainerd, 1973b; 1974; Brainerd und Brainerd, 1972; Hooper, Wanska, Peterson & De Fraen, 1979, S. 280/281; Winer, 1980). Diese Entwicklungssequenz hat auch Gültigkeit, wenn die relative Schwierigkeit der Konzepte an ihrer Beeinflußbarkeit durch Trainingsstudien eingestuft wird (Brainerd, 1974; Hooper, Wanska, Peterson und De Fraen, 1979, S. 293-294; Brainerd, 1977c).

Eines belegen diese Untersuchungen mit relativ guter Konsistenz: die enge Parallelität und Konvergenz in der Entwicklung der betroffenen Konzeptbereiche, von der Piaget ausgeht, läßt sich schwer aufrechterhalten. Die Tatsache schließlich, daß Klasseninklusionsaufgaben typischerweise Invarianzaufgaben in der Entwicklung nachfolgen (Kofsky, 1966; Brainerd, 1974; Klahr & Wallace, 1972; Winer, 1980), steht in völligem Widerspruch zu Piagets Theorie der Zahlentwicklung. Piaget behauptet nämlich, die extensive Quantifikation, wie sie als Unterklassen-Oberklassen-Relation durch die

(1) Diese Kennzeichnung ist widersprüchlich. Eingeschlossen sind Objekte, die sich nach der Länge unterscheiden und daher nach dieser Dimension klassifizierbar sind.

Klasseninklusionsaufgabe exemplifiziert wird, bilde den Vorläufer oder sogar die Vorbedingung für die numerische Quantifikation, die sich z.B. im Verständnis des Kindes für die numerische Relation zwischen Teilmenge und Gesamtmenge ausdrücken soll (Piaget und Szeminska, 1975, S. 248). Die empirischen Untersuchungen zur Entwicklung der Klasseninklusion widersprechen Piagets Hypothese deutlich, weil sie zeigen, daß noch 8 - 10-jährige Kinder erhebliche Probleme mit dieser Aufgabenform haben (Winer, 1980, S. 310, 317-318).

Manche Kinder in den ersten Klassen haben noch Schwierigkeiten mit der Teilmengenbildung und dem Zusammenfassen von Mengen (Pennington et al., 1980), aber der Anteil dieser Kinder ist relativ klein, und die Kinder können durch relativ kurze Anleitung mit solchen Aufgaben umgehen lernen (Hendrickson, 1979). Piagets Aufgaben zur Teilmengenbildung und Halbierung von Mengen sind wohl deshalb so schwierig für Kinder in der 1. und 2. Klasse, weil sie das Verständnis der Kommutativität erfordern ("was ich der einen Menge wegnehme, der andern aber hinzufüge, beeinflußt nicht die Gesamtmenge") (Piaget und Szeminska, 1975). Kurz: die Sequenz, die Piaget beschreibt, scheint von der relativen Aufgabenschwierigkeit aus gesehen, genau umgekehrt. Das Kind erwirbt die numerische Quantifikation, das numerische Vergleichen von Teilmengen und Gesamtmenge (z.B. anhand des Zählvorgangs, s. Wilkinson, 1976), vermutlich eher als die extensive Quantifikation; dies gilt zumindest dann, wenn man die Klasseninklusion als Repräsentant der extensiven Quantifikation sieht. Auch die Arbeit von Souviney (1980) belegt übrigens, daß die Fähigkeit des Kindes Klasseninklusionsaufgaben zu lösen nur einen niedrigen Zusammenhang zu seinem Verständnis der natürlichen Zahlen und der elementaren Operationen der Addition und Subtraktion hat.

Souviney (1980) untersuchte bei 90 Kindern aus drei Altersgruppen (Kindergarten, 1. und 3. Klasse) die Beziehungen zwischen logischer Klassifikation, Klasseninklusion, Seriation, Zahlinvarianz und verschiedenen arithmetischen Fertigkeiten (Umgang mit ganzen Zahlen; Addition/Subtraktion; Multiplikation/Division). Für jeden der Aufgabenbereiche wurden kriteriumsorientierte Tests entwickelt, um anhand mehrerer Testaufgaben die Fertigkeiten der Kinder erfassen zu können. Die relativ hohen Korrelationen zwischen Zählerhaltung/Seriation und Aufgaben zum Umgang mit ganzen Zahlen sind sowohl im Sinne der Arbeiten von Piaget & Szeminska (1975) als auch von

Brainerd (1973) interpretierbar. Entgegen Piagets Annahmen trugen die Fähigkeiten des Kindes bei der logischen Klassifikation wenig zur Vorhersage des Verständnisses der ganzen Zahl bei (multiple Regression). Ähnlich fand Souviney (1980, S. 221-222) keine bedeutsame Beziehung zwischen Klasseninklusionsaufgaben und Additions-/Subtraktionsfertigkeiten. Allerdings erfordern die arithmetischen Aufgaben keine komplexen begrifflichen Fähigkeiten, und könnten vom Kind auch aus dem Gedächtnis gelöst werden. Weitere Ergebnisse der Untersuchung werden hier zurückgestellt.

Piagets Position ist zusammengekommen kaum abgesichert. Gerade im Hinblick auf die behaupteten Beziehungen zwischen Klassifikation / Klasseninklusion und dem Zahlkonzept spricht eine Vielzahl von Arbeiten gegen Piagets theoretische Deutung, die numerische Quantifikation gehe aus dem Verständnis des Kindes für die qualitative (extensive) Quantifikation hervor.

6. Mengen, Klassen, Zahlen: ein Exkurs über die Mengenlehre

Da Piaget den Klassenbegriff als grundlegend für den Zahlbegriff ansieht, die moderne Mathematik zugleich auf dem Mengenbegriff aufbaut oder auf ihn ausgerichtet ist, ist es sinnvoll, die Beziehung zwischen beiden Konzepten zu klären.

Klassifikation erläutert Piaget häufig an zoologischen Klassifikationen, d. h. Hierarchien von einander übergeordneter Gattungs- und Ordnungsbeziehungen (z.B. Hund < Haustier < Säugetier). Die Gruppierung I, Addition von Klassen, beschreibt formal die kognitiven Operationen, die in solchen Klassenhierarchien ausgeführt werden können (vgl. Flavell, 1963, S. 173-176; Wermus, 1972). Allgemeiner kann man sagen, daß Mengen von Objekten vorliegen, für die eine Inklusionsrelation definiert ist:

$$\emptyset \subset A \subset B \subset C$$

Die experimentelle Beobachtung konzentriert sich auf die Frage, inwieweit das Kind verschiedene Beziehungen zwischen den definierten Mengen und Untermengen herstellen kann (z.B. die Menge A und die komplementäre Menge A' ergeben $A + A' = B$). Die typischste Aufgabe betrifft daher die Klasseninklusion (Winer, 1980): nachdem

man dem Kind eine Gruppe von 5 Tulpen und 4 Primeln gezeigt hat, wird ihm die Frage gestellt "gibt es mehr Tulpen oder mehr Blumen?". Interessanterweise definiert Piaget den Klassenbegriff anhand natürlicher Kategorien, z.B. aus der biologischen Terminologie, und durch deren hierarchischen Aufbau sind die Beziehungen zwischen den definierten Untermengen stets völlig eindeutig.

Piaget verwendet hier - ähnlich wie dies in der Mengenlehre geschieht - den Begriff Extension; die Klassen, die in der Analyse der Gruppierung I definiert werden, sind Extensionen, d.h. definierte Gegenstandsbereiche bestimmter abstrakter Merkmale. Beim Vergleich von Klassen auf verschiedenen Ebenen der Hierarchie kann das Kind eine extensive Quantifikation (vgl. Piaget & Szeminska, 1975) vornehmen, d. h. aus der formalen Definition der Gegenstandsbereiche, die einander einschließen, kann es auf die Größenbeziehungen zwischen einer Unterklasse (z.B. A - die Tulpen) und der übergeordneten Klasse schließen (z.B. B - Blumen).

In der Mengenlehre kann man zur inhaltlichen Definition von Mengen die Unterscheidung von sogenannten "Kollektionen" heranziehen. Kollektionen sind "anschaulich faßbare Ansammlungen oder Anhäufungen von Dingen", die als Gesamtes betrachtet werden. Für Kollektionen lassen sich keine Überschneidungen definieren, da einzelne Gegenstände als "Einheit individueller Art" mit der Eigenschaft der ganzen Kollektion ausgezeichnet sind (z.B. eine Herde Schafe) (Neeman, 1974, S. 385). Mengen sind dagegen nicht Ansammlungen von Gegenständen, sondern Extensionen, d. h. "Gegenstandsbereiche von Abstraktionen" (Neeman, 1974, S. 385). Das bedeutet, daß bei beliebigen Gegenständen von allen Eigenschaften abstrahiert wird, bis auf ein bestimmtes qualitatives Merkmal, das sie gemeinsam aufweisen (z.B. die Farbe) und nach dem die Zuordnung in die formal definierte Menge vorgenommen wird.

Mathematisch werden durch Mengen also "Begriffsumfänge" definiert, d. h. die Zahl all' der Gegenstände, die durch die definierenden Merkmale eines Begriffs erfaßt werden. Mengen können sich deshalb überschneiden, weil prinzipiell ein Gegenstand mit verschiedenen (abstrakten) Eigenschaften verschiedenartigen Eigenschaftsbereichen zugewiesen werden kann. Dabei muß man sich bewußt bleiben, daß die

Eigenschaftsbereiche definiert sind "unabhängig davon, ob es auch Gegenstände gibt, auf welche die betreffende Eigenschaft zutrifft" (Neeman, 1974, S. 387). Deshalb können leere Mengen definiert werden, die einen Eigenschaftsbereich bzw. Überschneidungen von Eigenschaftsbereichen kennzeichnen, obwohl - konkret - keine Gegenstände zuordenbar sind. Der klassische Mengenbegriff, der von Cantor herrührt, ist dagegen nicht so eindeutig definiert und verführt zu Verwechslungen mit dem Klassenbegriff bzw. dem Begriff der Kollektion. Mengen sind für Cantor beliebige Zusammenfassungen.

Kollektionen können sich wie schon erwähnt, nicht überschneiden, weil die Kollektion durch die Eigenart ihrer individuellen Elemente konstituiert wird. Klassen im Sinne von Piaget kann man dagegen in der strengeren Definition der Mengenlehre als Sonderformen von Mengen begreifen. Klassen sind Mengen, deren Eigenschaftsbereiche durch die natürlichen Merkmalsbeziehungen so definiert sind, daß sie einander völlig einschließen können. Überschneidungen von hierarchisch angeordneten Klassen sind demnach definierbar als Überschneidungen von Mengen, wobei die Unterklasse bereits als Untermenge der übergeordneten Klasse/Menge konstruiert ist (vgl. die Formalisierung der Gruppierung I bei Witz, 1969). (1)

Unter anderem durch die unpräzise Verwendung des Mengenbegriffs (z.B. bei Dienes, der dafür verschiedenartige Bezeichnungen zuläßt, und vor allem Wert darauf legt, daß die Kinder in der 1. Klasse Mengen als Zusammenfassungen von Gegenständen verstehen (Neeman, 1974)), wurde die Mengenlehre fälschlicherweise auch als psychologische Theorie gedeutet, die dem "natürlichen Ablauf menschlicher Erkenntnis" entsprechen müsse (Neeman, 1974, S. 387). Damit wird der "Erkenntniszusammenhang (...) dem Aufbau der Sache angeglichen", nämlich einem axiomatischen Aufbau der mathematischen Mengenlehre (Neeman, 1974, S. 387). Dagegen betont Neeman, daß "die Mengenlehre keine Aussagen über Erkenntnisprozesse

(1) In neueren amerikanischen Untersuchungen zur Klasseninklusion wird Piagets "natürliche Hierarchie" von Klassen nicht beibehalten (vgl. Klasseninklusion für Gewicht, Brainerd, 1974; Winer, 1980).

oder andere psychische Phänomene macht, sondern eine logische Theorie ist, die ganz bestimmte Existenzvoraussetzungen philosophischer Art macht, sich aber hervorragend für Beweisverfahren, für einen axiomatischen Aufbau der Mathematik eignet. Die Prozesse aber, die dazu führen, daß ein Kind lernt, Zahlenverhältnisse zu erfassen und schließlich Mathematik zu betreiben, sind bisher so gut wie unerforscht" (Neeman, 1974, S. 350).

Für die kognitive Entwicklungspsychologie ist von Interesse, welche Abstraktionsleistungen das Kind vollbringen muß, um Klassen bzw. auch Mengen zu bilden und anwenden zu können. Die Hierarchien innerhalb der Klassenbegriffe sind dem Kind bei "natürlich" vorliegenden Hierarchien anschaulich inhaltlich zugänglich, obwohl das Bild von Ober- und Unterklassen eine erhebliche Abstraktionsleistung darstellt. Mengen erfordern wie Klassen das Verständnis der Inklusionsrelation, darüber hinaus haben sie aber ein besonderes Merkmal, das sie formal so schwer anschaulich macht. Spricht man in Mengenbegriffen, so handelt man im Sinne der logischen Definition der Mengenlehre und der gegebenen Begriffsumfänge (man denke an den konkreten Umgang des Kinds mit logischen Blöcken), während man bei einer formaleren Fassung - im Gespräch über Mengen - das abstrakte Prinzip eines Eigenschaftsbereichs oder Gegenstandsbereichs (d.h. des Extensionsprinzips) nachvollziehen muß, um zu verstehen, welche logischen Implikationen Mengen haben.

7. Formalistische und konstruktive Ansätze und die Definition des Zahlbegriffs

Formalistische Ansätze formulieren die Regeln, die arithmetischen Operationen zugrundeliegen, ohne auf die Definition der Zahl bzw. der symbolischen Bedeutung der Zahl besonderes Gewicht zu legen. Eine solche formale Definition z.B. der Addition erlaubt es, die Relationen zwischen den Elementen bzw. Symbolen einer Aufgabe zu explizieren, sie gibt aber keinen unmittelbaren Hinweis darauf, wie diese Regelhaftigkeit entstanden sein könnte.

Das Verständnis für solche formale Prinzipien entsteht im Sinne Piagets aus der Abstraktion konkret ablaufender Handlungsvorgänge (vgl. reflektierende Abstraktion); das Kind befreit sich mit der operativen Repräsentation einer Aufgabe von konkreten räumlichen und zeitlichen Kontexten und kann Veränderungen einer Reizeanordnung gleichsam durch ein symbolisches Modell begleiten.

Formale Prinzipien könnte das Kind aber aufgrund sehr verschiedenartiger Handlungsstrukturen erwerben, bzw. aus diesen Strukturen ableiten. Dazu gehören sowohl der Zählvorgang, soweit er handlungsleitende Strukturen entstehen läßt, die dem Kind die Sukzession gleichartiger Einheiten bzw. die Vergleichsmöglichkeit von Mengen einer gewissen Ordnungszahl verdeutlichen, als auch die Korrespondenzbeziehung, die sich von konkreten räumlichen Zusammenhängen befreien kann und als abstraktes Prinzip schließlich im Rahmen der Mengenlehre Eingang gefunden hat (vgl. Cantor).

Die formalistischen Ansätze gehen z.T. auf den Mathematiker Hilbert zurück, dessen grundlegender Gedanke es war, die "Widerspruchsfreiheit eines mathematischen, ins Unbegrenzte fortsetzbaren Formelsystems durch gewisse formal-kombinatorische Eigenschaften der benutzten Symbole und die Art ihrer Kombination abzubilden (Becker, 1975, S. 360). Die Zahlen bzw. 'Zahlzeichen' (Ziffern) sind hier jeweils nur die Objekte, auf die die arithmetischen bzw. mathematischen Regeln angewandt werden. Indem sich dieses "Formelspiel" (Brouwer) nach "bestimmten Regeln (vollzieht)" kommt zugleich die "Technik unseres Denkens zum Ausdruck". Denken - hier speziell in der Mathematik - vergleicht Hilbert der Bildung und

Aneinanderreihung von Sätzen (vgl. Becker, 1975, S. 383).

Obwohl der formalistische Ansatz in den letzten Jahrzehnten in der Mathematik große Bedeutung gewonnen hat, ist er nicht unumstritten. Daher soll im folgenden kurz die entscheidende Kritik an der "formalen Theorie" dargestellt werden und als Ergänzung dazu die neu entstandene konstruktive Mathematik erwähnt werden, deren Position eine Brücke zu psychologischen Deutungen der Zahlentwicklung schlägt. "Hilberts Programm (...) verlangte, die Mathematik als formales axiomatisches System darzustellen. Ihre Aussagen sollten in bedeutungslosen und nach den Regeln der Logik verknüpften Symbolen ausgedrückt werden" (Calder, 1979, S. 52). Gegen dieses Verständnis der Mathematik als "Spiel", das Mathematiker widerspruchsfrei spielen können, weil sie die Regeln festgelegt haben, wandte sich früh der intuitionistische Ansatz in der Mathematik. Daß die Mathematik ihre "Sinnegebung" in der völligen Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems findet, beantwortet nicht die erkenntnistheoretische Frage, wie dieses formale Wissen zuallererst entsteht, eine Frage, die die Entwicklungspsychologie notwendig beschäftigen muß.

Besonders prägnant kritisiert Volk den formalistischen Ansatz: "Für eine 'formale Theorie' bleibt als einziges Begründungsproblem (neben der Sicherheit der Widerspruchsfreiheit) nur die Frage, ob die Deduktionsschritte regelmäßig sind... Der Formalismus verkürzt die Tätigkeit des Mathematikers auf ein schematisches Operieren auf bedeutungslosen Zeichenreihen" (Volk, 1980, S. 77). Auf welchen "inhaltlichen Gegenstandsbereichen" diese Operationen definiert sind, ist für diesen Ansatz nicht entscheidend; genauso wenig welchen Zweck die Zuordnung zwischen einem spezifischen inhaltlichen Gegenstand und gewissen formalen Operationen hat.

Volk führt eine scharfe Kritik gegen die "Fachborniertheit", die der Beibehaltung rein "formaler Theorien" zugrunde liegt: "Das Wissenschaftsverständnis der Mathematiker heute unterschlägt die Geschichtlichkeit, die Praxisabhängigkeit seiner Gegenstände und unterschlägt dadurch seine Anfechtbarkeit und seine Überwindbarkeit" (Volk, 1980, S. 88). Bestimmte formale Strukturen entstanden aus geschichtlichen Zusammenhängen der Entwicklung in der Mathematik, und sind eingebettet in bestimmte Funktionen, die dem jeweiligen Fachgebiet zukamen (Kline, 1972).

Die Strukturmodelle der Bourbaki-Gruppe führten den "Formalaxiomatismus" weiter, und diese Konzeption hat erheblichen Einfluß auf die Lehrpläne in den Schulen gewonnen (und übrigens auch

auf Plaget). Bourbaki sucht die "Durchschaubarkeit der Mathematik bis in die Tiefe" (Bourbaki, 1948, S. 163, zitiert n. Volk, 1980, S. 94) in der axiomatischen Beschreibung und einer formalen Ableitung der Mathematik aus einer logisch strengen Folge von Sätzen. Aber: "Die Durchschaubarkeit der Mathematik legt nicht den Anfang und nicht die Zwecksetzung (...) offen; sie legt nur die Beliebbarkeit der an den Anfang gestellten Formeln offen. Die Grundlegungs- und Zwecksetzungsprobleme kommen nicht mehr in den Sinn" (Volk, 1980, S. 94).

Die Arbeiten von Kurt Gödel schließlich haben den Mangel formaler Modelle ziemlich deutlich gemacht (vgl. Barker, 1964, 1967). In seinem Unvollständigkeitssatz beweist Gödel, "das aus keinem widerspruchsfreien endlichen Axiomensystem alle wahren arithmetischen Sätze formallogisch gefolgt werden können" (Volk, 1980, S. 88). Formale Fassungen der elementaren Zahlentheorie - wie die Peano-Axiome für die natürlichen Zahlenreihe - sind zwar widerspruchsfrei, aber zugleich unvollständig: es lassen sich "wahre arithmetische Sätze (finden), die mit Hilfe des ergänzten Systems zwar formulierbar, aus ihm aber nicht formallogisch abzuleiten sind". Die "vollständige formale Axiomatisierung der Arithmetik der ganzen Zahlen ist nicht möglich ..." (Volk, 1980, S. 89).

Gödels zweiter Satz, der Unableitbarkeitssatz besagt: "eine Aussage, die die Widerspruchsfreiheit eines gewissen hinreichend komplexen Formalismus darstellt, ist innerhalb dieses Formalismus nicht ableitbar, sofern der Formalismus widerspruchsfrei ist" (Volk, 1980, S. 90). So ist die "Widerspruchsfreiheit der klassischen Zahlentheorie mit den Mitteln dieser Theorie nicht beweisbar" (op. cit., S. 90). Das gilt z.B. wenn man die Widerspruchsfreiheit des formalen Modells von Peano beweisen wollte.

Daß der formalistische Ansatz ausreicht, um mathematische Systeme hinreichend zu begründen, ist damit zweifelhaft geworden.

Die konstruktive Mathematik ist ein Versuch, der Mathematik ihre "verlorengegangene Anschaulichkeit zurückzugewinnen" (Calder, 1979, S. 49). Eine ausführliche Darstellung dieser Position hat z.B. Bishop versucht (Bishop, 1967). Für die folgende Diskussion ist vor allem die Definition der Zahl und der elementaren arithmetischen Operationen von Bedeutung. In der konstruktiven Mathematik, und speziell der "konstruktiven Arithmetik" wird von einer "vor-arithmetischen Praxis" ausgegangen. Dazu gehört z.B. die "übliche Herstellung von Zählzeichen" (Volk, 1980, S. 114). Der Vorgang des Zählens und die Festlegung der Zählzeichen sind durch bestimmte Zwecke geprägt, historisch entsteht das Zählen gleich einem "allgemein verwendbare(n) Werkzeug", "dessen Benutzung

intersubjektiv kontrollierbar ist" (Volk, 1980, S. 115). Der Zählvorgang und andere elementare arithmetische Operationen werden von der konstruktiven Mathematik "synthetisch eingeführt". Wird das Zählen dem Herstellen von Strichlisten verglichen, so versucht man damit das Aufstellen von Zählzeichen als "zweckmäßig einsehbar (prüfbar)" vorzustellen. "Die konstruktive Arithmetik geht aus von praktischen Handlungszusammenhängen, in denen begründete Zwecke verfolgt werden ... " dafür sind "die Herstellung von Strichlisten und das Operieren mit ihnen" anschauliche Beispiele (Volk, 1980, S. 116). Sprachlich führt man die "Zahl" als abstrakte Gegenstände ein, um "konkrete Strichlisten" darzustellen.

Entscheidend für die konstruktive Arithmetik ist daher, daß sie "Handlungsschemata" beschreibt, die "unabhängig von der Geltung irgendwelcher Aussagen für jedermann erkennbar und als zweckmäßig einsehbar sind" (Volk, 1980, S. 117). Die " 'vorwissenschaftlichen' Handlungsschritte" sind als nachvollziehbare "geregelte (normierte) Handlungen" sozusagen die "Anfangsschritte" für das weitere wissenschaftliche Arbeiten (op cit., S. 117).

In einfachen arithmetischen Sätzen werden die "Konstruktionsregeln" für eine bestimmte mathematische Operation festgelegt, d. h. die Operation wird "synthetisch definiert". Die Regel selbst orientiert sich an der Zweckmäßigkeit der Handlungen für die jeweilige Konstruktion (vgl. Volk, 1980), S. 120). "Der operative Charakter arithmetischer Aussagen setzt so allen frei flottierenden 'Philosophien der Zahl' ein jähes und verdientes Ende. 'Eine ganze Wolke Philosophie kondensiert zu einem Tröpfchen Sprachlehre' (Wittgenstein). Mathematische Gegenstände existieren hier kraft Konstruktion. Allein die Konstruierbarkeit der mathematischen Gegenstände macht das "Kriterium ihrer Realität" (Volk, 1980, S. 120).

Konstruktive Mathematik und formal-axiomatische Methoden sind zueinander komplementär. Die "konstruktive Mathematik "ermöglicht, inhaltliche Aussagensysteme zu konstruieren, deren Strukturen dann durch Axiomensysteme formal dargestellt werden" (Volk, 1980, S. 124). Indem Formalismen von "fertigen Konstruktionen" ausgehen,

Ist ihr Bezug zur Realität gegeben. Dieses Zusammenwirken von konstruktiven und formalen Aspekten enthält viele Parallelen in der Geschichte der Mathematik (vgl. Kline, 1972), wobei der konstruktive Teil den konkreten (und praktischen) Bezügen der Mathematik nahe ist, während der formal-axiomatische Aspekt gleichsam als "denk-ökonomische" (Lorenzen) Verarbeitung bereits konstruierter mathematischer Modelle verstanden werden kann. Die normative Sprache der Mathematik wird zuallererst von den Zwecken geprägt, auf die die mathematischen Probleme orientiert sind; d. h. die mathematische Sprache ist an praktischen und konkreten Bezügen entwickelt und mitbestimmt durch die intersubjektive Austauschbarkeit von bestimmten Normen (vgl. Volk, 1980).

7.1. Bedeutung formalistischer/konstruktiver Ansätze für die Definition des Zahlbegriffs

Nachfolgend wird versucht, die Konsequenzen der konstruktiven und formalistischen mathematischen Ansätze für die Definition des Zahlbegriffs zu veranschaulichen, um zugleich die psychologische Bedeutung der konstruktiven Position zeigen zu können. Indem sie den Hilbertschen Gedankengang weiterführen, sprechen Jahnke et al. (1975, S. 217) davon, zu untersuchen, "in welcher Weise... der Zahlbegriff im System der Tätigkeit verankert bzw. verarbeitet werden kann". Die Frage, was denn die Zahlen eigentlich seien, wird zurückgestellt; statt dessen wird wichtig, "zu welchem Zweck man sie konstruiert und wozu man sie verwenden will". "Zahlen sind keine Mengen, können aber mit solchen identifiziert werden. Zahlen sind auch keine anderen Objekte, obwohl sie auch mit solchen identifiziert werden können" (Jahnke et al., 1975, S. 219-220). Die formalen Regeln, die der Arithmetik zugrundeliegen, müßten demnach eine strukturelle Ähnlichkeit zu den Handlungsstrukturen eines Kindes haben, obwohl die Lösungsstrategien des Kindes bei einer bestimmten arithmetischen Aufgabenstellung erst identifiziert werden müssen.

Wie komplex die Beziehungen zwischen den Repräsentationen der natürlichen Zahlen bzw. der ganzen Zahlen und den grundlegenden arithmetischen Operationen sein könnte, zeigt eine Übersicht über die

sehr verschiedenartigen Modelle der arithmetischen Operationen Addition und Subtraktion. Vest (1969) spricht hier von Familien von Modellen (er nennt insgesamt neun, mit z.T. mehreren Untermodellen), die ähnliche Lösungsprinzipien verwenden. Diese Modelle verwenden überaus unterschiedliche Repräsentationen der ganzen Zahlen, z.B. als Ordinalzahl, als Kardinalzahl, als Zustände, relative Länge, Maßzahlen etc. und einige Modelle beziehen mehr als eine Art der Repräsentation der Zahlen mit ein (Vest, 1969, S. 67).

Abgesehen von der Gültigkeit dieser Modelle vermittelt dieses Spektrum von Lösungsvorschlägen ein Bild der "vieldeutigen Natur der Operationen", die hier untersucht werden, und zugleich auch der verschiedenartigen mathematischen Eigenschaften der Operationen, die auf das System der natürlichen Zahlen angewandt werden. Vest spricht daher von Strategien, die die Flexibilität und logische Unabgeschlossenheit der untersuchten arithmetischen Operationen verdeutlichen (Vest, 1969, S. 67).

Betrachtet man die Bildung des Zahlbegriffs in einem sehr umfassenden historischen Zusammenhang (vgl. Kline, 1972, Jahnke et al., 1975, S. 221-229), so ist besonders offensichtlich eine kontinuierliche Entwicklung von einem "rein empirischen zu einem bewußt operativen Gebrauch der Begriffe" (Jahnke et al., 1975, S. 221). Eine ausführliche Beschreibung dieser Entwicklung findet sich z.B. bei Jahnke et al., 1975 oder auch bei Klix, 1980 (S. 189-217), so daß sie hier nur erwähnt zu werden braucht (vgl. auch Cassirer, 1923; Kline, 1972).

Während historisch die Zahlen noch mit den zu zählenden Dingen verschmolzen waren (z.B. ¹⁷Frühformen indogermanischer Sprachen), löste sich in der Geschichte der menschlichen Entwicklung die Zahl immer mehr von den Objekten, wurde zunächst als Eigenschaftswort verwendet, später durch Einführen von "Hilfsmengen" auf andere Objekte bezogen (z.B. die Finger), bis das System der ganzen Zahlen schließlich eine eigenständige Geltung erlangte. Zu den Verbesserungen und Erweiterungen des Zahlsystems zählen dann das Entstehen von Stellenwertsystemen, um größere Zahlen darzustellen (z.B. bei Babyloniern und Ägyptern), der praktische Umgang mit Zahlen in den Rechenfertigkeiten und schließlich die Erweiterung des Zahlbereichs aufgrund praktisch-mathematischer Problemstellungen (z.B. die Einführung der negativen Zahlen).

Jahnke et al. (1975) deuten diese historische Entwicklung als "Konstruktionsprozeß eines Werkzeugs (nämlich des Zahlbegriffs,

F.V.), das ständig verfeinert und verbessert und verallgemeinert wird" (Jahnke et al., 1975, S. 225), um Problemstellungen gerecht zu werden. Ein Begriff wie die Zahl ist ein "Werkzeug", insoweit er objektive Operationen zuläßt; zugleich offenbart aber der Zahlbegriff bzw. der Umgang mit Zahloperationen auch eine "objektive Beziehungsstruktur", das in das Wissen des Mathematikers als auch des Kindes einfließt. Der Zahlbegriff läßt sich auffassen als eine "Einheit von Wissen und Werkzeug" (Jahnke et al.), eine Wendung, die die Autoren sowohl für die Geschichte der Mathematik als auch für die Entwicklung des Kindes heranzuziehen versuchen.

Eine derart relativierte Betrachtungsweise des Zahlbegriffs läßt eine eindeutige Zuordnung des Begriffs zu bestimmten logischen Modellen nicht besonders sinnvoll erscheinen. Von größerem Interesse ist in diesem Zusammenhang dagegen, welches Verständnis das Kind von logischen Prinzipien hat und wie es sie in seine konkreten Handlungen und Operationen mit Objekten, Mengen von Objekten und Zahlsymbolen einordnen kann. Das operative Verfahren, das die Beziehungen zwischen Zahlsymbolen überhaupt erst herstellt, z.B. die Addition, vermittelt dem Kind Wissen über die arithmetischen und logischen Relationen zwischen Mengen von natürlichen Zahlen, und unterstützt so die Zahlbegriffsentwicklung.

"Alle genannten Zahl- 'Definitionen' (1) werden der 'Tiefe' dieses Begriffs (im Sinne von Beziehungsreichtum und Entwicklungsfähigkeit) wie sie in Gödels Satz von der Unvollständigkeit der Arithmetik angedeutet werden, nicht gerecht; und sie können es auch nicht, wenn man sie als 'fixe' Definitionen interpretiert, weil das eine falsche Vorstellung von der Natur eines Begriffs (hier des Zahlbegriffs) impliziert" (Jahnke et al., 1975, S. 220).

Erlaubt die formalistische Darstellung nicht die Widerspruchsfreiheit oder die Vollständigkeit des arithmetischen Systems zu beweisen, so spricht dies gegen ein einsinniges formales Modell

(1) Gemeint sind die logischen bzw. axiomatischen Grundlegungen der Zahl.

der Arithmetik; der Zahlbegriff läßt sich mithin nicht mit einem umschreibbaren logischen Prinzip oder axiomatischen System erschöpfend kennzeichnen, weil diese Prinzipien nur Relationen in einem bestimmten formalen System ausmachen, die aber ^{auch} in einem anderen logischen System bzw. formalen Modell ausdrückbar wären (1).

In analoger Weise spricht Tall (1980) von dem kardinalen Paradigma als "nur einem von mehreren möglichen unendlichen Ausweitungen des Zahlkonzepts statt einer einzigen logischen Realität gegenüber der alles beurteilt werden müßte" (Tall, 1980, S. 273). Beim Vergleich verschieden großer Strecken (und der Frage nach der möglichen Menge von Punkten, die auf diesen Strecken Platz finden) zeigt sich, daß Kinder die Zahl nicht in einem kardinalen Sinn intuitiv verwenden; statt dessen wählt das Kind eine - wenn auch nicht genaue - Form des Messens (vgl. Tall, 1980, S. 272-273). Das Kind stellt bei Objektanordnungen mit unterschiedlicher Länge, bei denen die Anzahl der Objekte nicht abzählbar ist, intuitiv eine Korrespondenzrelation nicht bzw. nur dann, ^{her} wenn dies durch die deutliche Abgrenzung der nebeneinander liegenden Objekte veranschaulicht würde.

Dieses Beispiel verdeutlicht zugleich, wie sehr die Antworten eines Kindes durch die Zweckmäßigkeit einer Perspektive geprägt sein können. "Natürliche Zahlen dienen bei kardinaler Betrachtungsweise dazu, die Mächtigkeit endlicher Mengen zu messen" (Ebbinghaus, 1974, S. 37). Gleich dem Physiker, der sich für die Definition einer Maßeinheit (z.B. die Längeneinheit "Meter") ein "Standardmaßstab" wählt ("Urmeter"), können natürliche Zahlen "als bequem handhabare Standardmaße für endliche Mächtigkeiten" verstanden werden (Ebbinghaus, 1974, S. 37); damit wird der Vergleich von Mengen gleicher Anzahl oder Mächtigkeit in einen ordinalen

-
- (1) "Ich möchte glauben, daß die Frage: Was sind und was sollen die Zahlen?, ihrer Natur nach so komplex ist, daß sie nicht durch eine einzige Antwort beantwortet werden kann. Es liegt, ..., an der Natur der Zahlen und an der Natur unserer Aussage-möglichkeit, daß unsere Aussage über das Sein der Zahl sich in mehrere Antworten aufspalten muß" (Martin, 1953, S. 616).

Zusammenhang eingeordnet, die Größe einer Menge ergibt sich aus der Iteration (Aufzählung) gleichrangiger Einheiten (Standardmaße), die in konsistenter räumlicher und zeitlicher Abfolge aufgezählt werden.

Die Ausführungen von Tall und von Ebbinghaus zeigen, daß die logische Definition einer Aufgabe (wie z.B. beim Vergleich nicht unmittelbarer Punktmengen, bei der eine Korrespondenzrelation logisch nahegelegt wird) nicht mit dem intuitiven Zugang des Kindes zu einer Aufgabe übereinstimmen muß. So kann das Kind für eine Aufgabe, die logisch einem kardinalen Lösungsprinzip zugeordnet werden kann, eine ordinale Strategie (nämlich das Aufzählen und/oder das Auszählen von Maßeinheiten) anwenden, und umgekehrt (Zu einem ähnlichen Beispiel vgl. die spontanen Lösungsvorschläge von Kindern bei Clothiaux, 1978).

8. Probleme logisch-struktureller Modelle und die Untersuchung der Zahlbegriffsentwicklung

"Was genau wird gewonnen, wenn man die kognitive Theorie in eine logisch-mathematische Form faßt und welche Beziehungen haben solche Theorien zu unseren empirischen Erfahrungen?" (Feldman & Toulmin, 1976, S. 410) Diese Frage bekommt sicherlich ihre höchste Relevanz, wenn man versucht, die Entwicklung logisch-mathematischer Erkenntnis selbst abzubilden, in diesem Fall die Zahlentwicklung. Die Eigenart des strukturalistischen Ansatzes ist die überaus abstrakte Fassung geistiger Strukturen die das Verhalten eines Kindes regulieren sollen; durch diese qualitative Trennung innerer kognitiver Strukturen von offen beobachtbarem Verhalten ist eine ein-eindeutige Beziehung zwischen Struktur und bestimmten Verhaltensweisen nur schwer zu beschreiben. Aber nur dann können die strukturellen Theorien eine "wirkliche Bedeutung in empirischer Hinsicht..." gewinnen, wenn wir am Ende in der Lage sind, "zu erklären, wie Strukturen und Leistungen zueinander in Beziehung stehen" (Feldman & Toulmin, 1976, S. 414).

Verschiedene Formalisierungen der grundlegenden Gruppierungen von Piaget, z. B. durch Grize, Granger, Wermus und Witz und schließlich von E. Wittman (vgl. Wittman, 1975 zum Überblick) versuchten die formale Konsistenz des Gruppierungsmodells zu verbessern und - um mit Witz (1969) zu sprechen - Piagets theoretische Arbeiten "von Grund auf" aufzuarbeiten und einer rigoroseren Form zuzuführen. Logische Kriterien der Konsistenz, Vollständigkeit oder Sparsamkeit, die auf diese formalen Modelle angewandt werden mögen, geben keinen Aufschluß darüber, ob das formale Modell die kognitiven Leistungen des Kindes überhaupt angemessen abbildet, denn "kein einzelnes formales System kann auf einzigartige Weise angemessen sein für eine gegebene Menge von physikalischen Phänomenen..." (Feldman & Toulmin, 1976, S. 416). Auch verführt die Formalisierung dazu, die verschiedenen theoretischen Ebenen zu vermischen (vgl. T. Mischel, 1979). Ein Gruppierungsmodell z.B. für die Darstellung der kognitiven Systeme der Klassifikation und der Seriation ist zuallererst

eine theoretische Repräsentation möglicher Handlungsstrukturen und -koordinationen. Selbst wenn man die Gruppierung unmittelbar als "System von Handlungen" (Wittman, 1973, S. 126) beschreibt, Handlungen, die in eine flexible mathematische Struktur "koordiniert und organisiert" sind, ist damit der "Charakter der empirischen Strukturen, die (die Gruppierung) vorgeblich repräsentiert" nicht geklärt (Feldman & Toulmin, 1976, S. 417).

Die mathematische Repräsentation gestattet es zu argumentieren, daß für ein bestimmtes Handlungssystem eine innere logische Notwendigkeit besteht. Das gilt z.B. für die Herleitung des Begriffs der natürlichen Zahlen bei Piaget aus den logischen Strukturen der Klassifikation und der Seriation. Versucht man den Begriff der "arithmetischen Einheit", die in der Anordnung beliebig aufreihbar und zusammensetzbar ist, nur aus den logischen Beziehungen in den Strukturen der Klassifikation und der Seriation abzuleiten, so ist Piagets Behauptung, die "Einheit" könne aus der Verschmelzung der beiden Strukturen unter Preisgabe kennzeichnender qualitativer Merkmale der Teilstrukturen entstehen, logisch nachzuvollziehen (vgl. Beth & Piaget, 1966). Aber es bleibt offen, ob die abgeleiteten formalen Notwendigkeiten irgendein Gegenstück in "empirischen Relationen und Sequenzen (haben), die in der tatsächlichen Erfahrung (des Kindes)" bestehen (Feldman & Toulmin, 1976, S. 418).

Kognitive Leistungen eines Kindes können auf sehr verschiedenartige Weise in logischen Modellen dargestellt werden; psychologische Theorien der Zahlentwicklung, die sich aus logischen Theorien herleiten, geben dazu sehr gute Beispiele. Aber auch hier muß man den Unterschied betonen zwischen verschiedenen logischen Repräsentationen des Zahlenbegriffs, die im Hinblick auf formale Kriterien bewertet und unter einander verglichen werden können (vgl. Brainerd, 1973) und den empirischen Leistungen des Kindes selbst (T. Mischel, 1979).

Ordnet man dagegen die logische Struktur an "elementaren Operationen" und Handlungen aus, wie Wittman (1973, S. 126 ff.), unterstellt man eine Isomorphie zwischen "notwendigen Relationen" und "tatsächlich existierenden Relationen ... im geistigen Leben

der Kinder selbst". Für diesen Fall müssen die empirisch behaupteten Relationen aber auch präziser belegt werden (Feldman & Toulmin, 1976, S. 419) (zu einer solchen Isomorphie-Behauptung vgl. z.B. Brainerd, 1973).

3.1 Piagets Modell der Zahlinvarianzaufgabe in ihrer Beziehung zur Zahlentwicklung

Hier beginnt z.B. die Schwierigkeit für Piagets Deutung der Zahlentwicklung (1). Wirkten Strukturen der Seriation (asymmetrische und transitive Relation) und Klassifikation bei der Bildung des Zahlbegriffs zusammen, so müßte eine Korrespondenz bzw. Konvergenz in der Entwicklung 6- bis 7-jähriger Kinder im Verständnis hinsichtlich des Verständnisses für die verschiedenen logischen Relationen der Seriation, der Klassifikation und der Zahl eindeutig belegbar sein. Dies ist aber nicht gesichert, zumindest nicht im Rahmen der derzeitigen Untersuchungsmethodik (vgl. z.B. Hooper, Toniolo & Sipple, 1979). Klassifikationsaufgaben und Klasseninklusionsaufgaben fallen Kindern im betroffenen Altersbereich wesentlich schwerer als Seriations- und Zahlinvarianzaufgabe (Brainerd, 1979, zur Übersicht). Piagets Belege beschränken sich auf qualitative Parallelen in den beschriebenen drei Stadien der untersuchten Strukturen und sind zu "grob", um als gültige empirische Evidenz weiterzuhelfen. Die Eigenart der Arbeiten Piagets und Szeminskas ist im Grunde, daß sie logische Beziehungen und empirische Beobachtungen immer wieder vermischen und versuchen, sie wechselseitig zu belegen (Piaget & Szeminska, 1975).

Erstaunlicherweise fehlt es auch an einer überzeugenden

-
- (1) Im folgenden wird in erster Linie Piagets Theorie erörtert, weil sie - im Gegensatz zu anderen logisch begründeten Theorien der Zahlentwicklung - hinreichend explizit erarbeitet wurde, um verschiedene logische und psychologische Konsequenzen dieser Position diskutieren zu können. Weder die ordinale noch die kardinale Theorie bieten ein anschauliches Lösungsmodell für die Zahlinvarianzaufgabe!

Aufgabenstellung, in der die kognitive Leistung des Kindes im Hinblick auf die komplexe Struktur des Zahlbegriffs zum Ausdruck kommt. Die Wahl der Zahlinvarianzaufgabe als wichtigstes oder zumindest "minimales Kriterium" (Beth & Piaget, 1966) der Entwicklung des Zahlbegriffs ist unter anderem deshalb unglücklich, weil bei dieser Aufgabe nur schwer veranschaulicht werden kann, inwieweit logische Strukturen der Klassifikation und der Seriation für den Zahlbegriff von Bedeutung sind. (1)

Die Zahlinvarianzaufgabe ist eingebettet in die Aufgaben zur quantitativen Invarianz, die Piaget untersucht hat (Zahl, Gewicht, Menge, Volumen etc). In seinen älteren Arbeiten betont Piaget das System der Transformationen, die auf ein bestimmtes Objekt angewandt wird. Erhaltung gelingt dem Kind in diesem System dann, wenn es eine "Komposition quantitativer Varianten" herstellt (z.B. bei der Zahlinvarianz Dichte und Länge zueinander in Beziehung zu setzen) oder wenn es eine "additive Komposition" vornehmen kann (z.B. kein Stein wird dazugelegt, keiner weggenommen). (vgl. Piaget, 1978, S. 115-117). Als dritte Erklärung findet Piaget die Reversibilität der ausgeführten Transformation als typisches Argument für die Erhaltung (Piaget, 1978, S. 125-127). "Die Erfassung von Mengen ist daher das Ergebnis operatorischer Strukturen von zunehmender Komplexität, die sich über Klassifikationen (...) und Reihenfolgen ebenso erstrecken wie über numerische 'Gruppen' und räumliche Maße" (Piaget, 1978, S. 126). Das "Gesamtsystem" (d.h. die strukturellen Beziehungen innerhalb der Gruppe) "ist ursächlich für die Herausbildung der Erhaltung" (Piaget, 1978, S. 127). In seiner neueren Deutung der Erhaltungen versucht Piaget Morphismen heranzuziehen, um die Bedeutung von Korrespondenzen innerhalb von operativen Systemen zu klären. Verändert man ein Objekt, so wird dies vom Kind als Verschiebung

(1) Das gilt weniger für eine Reihe anderer Aufgaben, die Piaget und Szeminska (1975) untersuchten, und bei denen die Verwandtschaft zwischen verschiedenen logischen Strukturen eher naheliegt (vgl. z.B. die Treppenaufgabe oder die Würdenaufgabe zur Verdeutlichung des Zusammenhangs von Kardinalzahl und Ordinalzahl).

der "Position der Komponenten" gedeutet (Piaget, 1977, S. 355). Was an einer Stelle weggenommen wird, wird an anderer Stelle hinzugefügt. Piaget sucht diese Interpretation der Erhaltung durch Versuche zu belegen, in denen bei einem Objekt ein einzelnes Element an anderer Stelle verschoben wird (z.B. bei der Zahleninvarianzaufgabe wird bei zwei gleichlangen Reihen ein Stein an das andere Ende der Reihe verschoben, so daß ein Stein übersteht) (Inhelder u.a., 1975, S. 25 ff.). Das Verständnis des Kindes für die beobachtbaren Korrespondenzen zwischen der ersten Anordnung vor der Transformation und der zweiten nach der Transformation dient als Grundlage für das weitere Verständnis von Operationen und Transformationen (d.h. zeitlichen Veränderungen).

Indem das Kind erkennt, daß eine Komponente nur verschoben wurde, aber ihre Identität bewahrt hat, begreift es das Prinzip der Kommutativität ("commutability"). Daneben erwirbt es "die Invarianz des Ganzen trotz der internen Umordnungen", d. h. von "stellvertretenden Beziehungen" (vicarious relationships) in Anordnungen, die trotz verschiedenartiger Zusammenstellung ihre Menge beibehalten (Piaget, 1977, S. 355-357). Nicht nur operationale Systeme (und die darin stattfindenden Transformationen) liegen demnach den Erhaltungsbegriffen zugrunde, sondern auch Korrespondenzen zwischen verschiedenen Zuständen innerhalb des Systems, die den operativen Vorgängen vorausgehen, sie aber auch zugleich, nachdem sie einmal koordiniert sind, als notwendige Beziehungen unterstützen.

Was nicht deutlich wird ist, inwiefern die Zahleninvarianzaufgabe eine Beziehung hat zu der Interpretation der Zahlentwicklung als Synthese von Strukturen der Seriation und Klassifikation und damit der Herausbildung von beliebig aufreihbaren und zusammenfügbaren arithmetischen Einheiten. Es ist wahrscheinlich, daß Piaget die Zahleninvarianzaufgabe als repräsentativ für die Herausbildung der Gruppierungsstruktur sieht, die auch für die Deutung der beiden anderen logischen Strukturen herangezogen wird (vgl. die Beschreibung der Gruppierungsstrukturen bei Flavell, 1963; Sheppard, 1978, S. 47-53).

Die Zahleninvarianzaufgabe ist als Erhaltungsaufgabe auch ein

wichtiger Repräsentant für die Bedeutung einer räumlichen Transformation auf vorher als gleich festgestellte Mengen. In gewissem Sinn wird damit das Verständnis des Kardinalzahlaspekts der natürlichen Zahlen untersucht. Für Mengen, deren numerische Repräsentation das Kind nicht genau kennt, deren Gleichheit es durch die Korrespondenzrelation aber festgestellt hat, werden verschiedene Klassen von räumlichen Transformationen durchgeführt und beobachtet. Legt man dieser Erhaltungsaufgabe dann das logische Gruppierungsmodell zugrunde, für das verschiedene logische Bedingungen (z.B. Komposition, Reversibilität, Assoziativität) definiert sind, so kann man die Erklärung des Kindes nach der räumlichen Transformation z.B. im Sinne der Reversibilität ("ich kann sie wieder gleichmachen, wenn du sie zusammenschiebst") oder der Kompensation ("die blauen Steine sind dichter zusammen, aber die anderen sind länger") verstehen.

Sehr unterschiedliche Klassen von Transformationen sind möglich: seitliche Verschiebungen, die zu Veränderungen der Länge/Dichterelation führen (Piaget & Szeminska, 1975); räumliche Verschiebungen, die die Länge und die räumliche Verteilung beeinflussen (z.B. Anordnen in einem Kreis, Rothenberg, 1969); Hinzufügen oder Wegnehmen eines Elements mit oder ohne räumliche Transformation; und schließlich Veränderungen der inneren Struktur der Elemente durch Einfügen verschieden großer Elemente, deren räumliche Verschiebung den perzeptuellen Eindruck noch stärker verändert (Hofmann & Trepanier, 1975).

Ohne Zweifel führen unterschiedliche Transformationen auch zu gewissen Unterschieden in den Antworten des Kindes; komplexere Transformationen - die aus mehreren räumlichen Veränderungen zusammengesetzt sind - stellen schwierigere Aufgabenstellungen als einfache lineare Transformationen und werden daher zum gleichen Zeitpunkt in der Entwicklung von einem kleineren Prozentanteil von Kindern gelöst (Rothenberg, 1969; Rothenberg & Orost, 1969; Hofmann & Trepanier, 1975; P.H. Miller, 1978; S.A. Miller, 1980). Solche beobachteten Aufgabenschwierigkeiten warfen zuerst Zweifel darüber auf, ob es sich bei der logischen Struktur der Gruppierung um eine "universelle inhaltsfreie geistige Struktur" handle (Feldman & Toulmin, 1976, S. 424). (Auf die Bedeutung von

Reizfaktoren in der Zahlinvarianzaufgabe wird an anderer Stelle aber noch eingegangen.)

Zusammengefaßt kann man feststellen, daß die Interpretation der Zahlinvarianzaufgabe ein typisches Beispiel für die Deutung der Erhaltungs- oder Invarianzbegriffe durch Piaget ist. Piaget kann aber nicht deutlich machen, in welcher Hinsicht diese Aufgabe zur "kardinalen Invarianz" in Zusammenhang steht mit dem Konzept der natürlichen Zahlen, das nach Ansicht Piagets an der Synthese der Strukturen der Klassifikation und der Seriation hervorgeht; oder wie er an anderer Stelle vorsichtiger formuliert: alle drei Strukturen entwickeln sich gemeinsam und unterstützen sich in ihrer Herausbildung gegenseitig. Die Strukturen der Seriation und Klassifikation hat Piaget anhand von spezifischen Gruppierungsmodellen beschrieben, die die operativen Vorgänge, die innerhalb dieser Strukturen durchgeführt werden, darstellen (vgl. Flavell, 1963, S. 173-176, 180-182).

Anschaubarer wird Piagets Versuch, Zahl, Klassifikation und Seriation zueinander in Beziehung zu setzen, wo er die Multiplikation von Klassen bzw. von Zahlen untersucht-oder ähnlich die Addition von Klassen bzw. Zahlen-und versucht Parallelen zwischen beiden operativen Strukturen herauszuarbeiten. Dabei zeigt er, wie Unterschiede zwischen Klassifikation und Zahl durch das Hinzukommen systematischer Ordnungsbeziehungen innerhalb des Systems der natürlichen Zahlen (bzw. ganzen Zahlen) die er aus der Seriationsstruktur ableitet, zustande kommen. Aber in jeder dieser Aufgaben kommen auch eine Vielzahl von Einflußfaktoren zum ragen, die Piaget übergeht.

8.2. Repräsentation logischer Modellvorstellungen

Das Problem der kognitiven Repräsentation logischer Modellvorstellungen stellt sich sowohl für Piagets abstraktes Gruppierungskonzept (einschließlich seiner formalen Darstellung der Synthese des Zahlkonzepts aus zwei unabhängigen Gruppierungen) als auch die beiden anderen Theorien der Zahlentwicklung. Für

die Zahleninvarianzaufgabe werden immer wieder neue Lösungsmodelle vorgeschlagen (Halford, 1970; Pascual-Leone, 1976; Miller, 1978; Siegler, 1979; Case, 1980; Halford & Wilson, 1980; Scandura & Scandura, 1980), die sich von Piagets logischer Darstellung der Aufgabe mehr und mehr entfernen.

Die Bewertung der Theorien der Zahlentwicklung macht auch erhebliche Schwierigkeiten, weil die Operationalisierung logischer Begriffe oder Relationen anhand spezifischer kognitiver Aufgaben nicht immer überzeugend ist. Welche Beziehungen bestehen zwischen der logischen Definition eines mathematischen Begriffs, z.B. der Axiomatisierung des Zahlbegriffs nach Peano, und Entwicklungsaufgaben, die diesen Begriff widerspiegeln könnten? Zumeist fehlt ein Lösungsmodell der untersuchten Aufgaben, das es erlauben würde, die Art wie verschiedenartige logische Relation repräsentiert werden, zu bewerten.

Unterstellt z.B. die ordinale Theorie der Zahlentwicklung, daß der Erwerb des (ordinalen) Zahlbegriffs das Verständnis der asymmetrischen-transitiven Beziehung erfordert, so ist für die Untersuchung entsprechender Entwicklungsaufgaben bedeutsam, in welchem inhaltlichen Zusammenhang das Verständnis des Kindes für die asymmetrische - transitive Relation untersucht wird (z.B. Untersuchung der Transitivität der Länge, des Gewichts, von unterschiedlich großen Mengen), welche begriffliche Anforderung die Aufgaben an die kognitiven Fähigkeiten des Kindes stellt und ob das Kind die Lösung auch über einen einfacheren Weg finden kann, der das Verständnis logischer Relationen nur vortäuscht ("mimicking", Fischer, 1980); und schließlich welche spezifischen Reizfaktoren innerhalb der Aufgabe die Lösungsstrategie des Kindes beeinflussen können (z.B. Hervortreten bestimmter räumlicher Reize).

Versteht das Kind allgemeiner die Bedeutung von Ordnungsbeziehungen, sofern es die Transitivität der Länge eindeutig bewältigt? In welchem Maß ist es fähig, seine Lösungsmethode auch auf andere inhaltliche Bereiche zu übertragen, vor allem wenn diese abstraktere Dimensionen betreffen? Spielt diese Fähigkeit zur Generalisierung des Konzepts eine Rolle beim Verständnis

des logischen Konzepts (mathematische Definition einer Ordnungsrelation).

Brainerds Operationalisierung der Ordination und Kardination (Brainerd, 1973), die versucht, die "minimal notwendigen" Bedingungen einer logischen Relation abzubilden, übergeht ebenfalls die Frage, inwieweit ein psychologisches Modell des Lösungsverhaltens des Kindes die logischen Voraussetzungen widerspiegelt. Brainerds Ordinationsaufgabe erfaßt die Transitivität der Länge bzw. des Gewichts bei drei unterschiedlich großen/schweren Gegenständen und hat so eigentlich einen anderen inhaltlichen Bezug. Inwieweit spiegelt diese Aufgabe dann das Verständnis des Kindes für formale Ordnungsbeziehungen wieder, relativ unabhängig von der inhaltlichen Definition der Ordnungsrelation ("größer als", "schwerer als", "mehr als", "hübscher als") (vgl. Feigenbaum, 1974). Die Kardinationsaufgabe dient dazu, Mengenvergleiche über die Korrespondenzbeziehung zu erfassen (Ähnlichkeitsbeziehungen zwischen Mengen). Seltsamerweise existiert aber keine Untersuchung, die nachprüft, ob sich Kinder zwischen 5 und 8 Jahren tatsächlich auf die Korrespondenz verlassen oder ob sie nicht versuchen, die verschiedenen räumlichen Informationen (Länge und Dichte der abgebildeten Mengen) systematisch zu integrieren. Brainerds Argument, es existiere eine Isomorphie zwischen mathematischen Definitionen/Begriffen und bestimmten Entwicklungsaufgaben, setzt das voraus, was es eigentlich zu beweisen gälte.

Insoweit die definierten Aufgaben nur unzulängliche Repräsentanten einer bestimmten logischen Relation sind, besagen beobachtete Entwicklungsverläufe zwischen verschiedenen Aufgaben nur wenig über die Validität der jeweiligen Theorie der Zahlentwicklung. Diagnostischen Problemen bei der Definition, Ausgestaltung und Darbietung einer Aufgabe kommen hier also eine ähnliche Bedeutung zu wie in der gesamten Piagetforschung (Surber, 1977; Flavell, 1977) und die Frage, welches Kriterium für eine Aufgabe herangezogen wird (Patterson, 1978), entscheidet mit darüber, ob sich die Entwicklungspriorität eines Konzepts über ein anderes bestätigen läßt. Die Vorhersagen der Theorien der Zahlentwicklung beziehen solche Entwicklungsunterschiede zwischen Konzepten mit ein.

Eine zentrale Frage bei der Beschreibung der Zahlentwicklung des Kindes ist die nach der Definition des Zahlbegriffs selbst. Die verschiedenen Ansätze legen ihren Schwerpunkt auf sehr unterschiedliche Aspekte des Zahlbegriffs: die Ordinalzahl, die Kardinalzahl, die Zahlinvarianz, Zählen, arithmetische Aufgaben. Abgesehen von der Frage nach der mathematischen Priorität eines bestimmten Begriffs gegenüber einem zweiten, ist die Untersuchung der "Entwicklungspriorität" abhängig von der spezifischen Definition des Begriffs, der möglichen Lösungsmethoden für die Aufgabe, und den verschiedenartigen Reizdimensionen, die bei der Lösung eine Rolle spielen.

Die Beziehung kognitiver Repräsentationen bzw. der Lösungsstrategien kognitiver Aufgaben zu axiomatischen Definitionen eines logischen Konzepts bzw. von Aufgabenklassen ist weitgehend ungeklärt. Man erinnere sich z.B. an den Versuch von Osherson (1974), die Formalisierung der Längenaddition durch Grize, eines Mitarbeiters Piagets, in konkrete Aufgabenstellungen zu übersetzen und die relativen Schwierigkeiten dieser Aufgaben gemäß ihrem logischen Status zu demonstrieren. Er bewertete selbst seinen Versuch, solche Axiome direkt als Aufgabendefinitionen zu verwenden als nur begrenzt erfolgreich.

Die Mehrdeutigkeit formaler Modelle des Lösungsverhaltens von Kindern war ein prägender Faktor bei Scanduras struktureller Lerntheorie (vgl. Scandura, 1978). Er bestreitet die Allgemeingültigkeit logischer Sequenzen in der Entwicklung, die durch das Studium von Entwicklungsprioritäten empirisch abzusichern seien, weil damit "implizit angenommen wird, daß es eine einzigartige Grundlage für das Lösen einer gegebenen Klasse von Aufgaben gibt" (Scandura und Scandura, 1980, S. 4). Strukturelle Modelle im Sinne Piagets geben ideale und formelle Darstellungen der Beziehungen in einer Aufgabe, aber die Lösungswege, die zu diesen strukturellen Beziehungen hinführen, sind damit nicht eingrenzbar. Mehr noch: die "Lösungsregeln" (solution rules, Scandura), die diese Strukturen in konkrete Aufgabensituationen entstehen lassen, sind nicht durch die Struktur vorgeschrieben, und können eine Vielzahl von alternativen Zugangsweisen zu der Struktur

erlauben. Mathematisch ist leicht nachzuweisen, daß "wenn es eine Regel/Prozedur gibt, um eine gegebene Klasse von Aufgaben zu lösen, dann muß es eine unendliche Zahl anderer geben, die dasselbe erreichen" (Scandura & Scandura, 1980, S. 4). Mit einem Wort: "logisch bestimmte Sequenzen von Aufgaben sind ein Mythos. Solche Sequenzen können nicht unabhängig von den Strukturen/

Prozessen definiert werden, die ihren Lösungen zugrundeliegen" (Scandura und Scandura, 1980, S. 4, vgl. Scandura, 1978). Die strukturellen Modelle betreffen tatsächlich eher die Konstruktionsmöglichkeiten von Lösungsregeln, die spezifischen Lösungswege selbst lassen dagegen eine Vielzahl von unterschiedlichen Lösungsmethoden denkbar erscheinen (vgl. Scandura und Scandura, 1980, S. 29 ff.). Easley (1980) bemerkt ähnlich, wie schwierig es ist, Regeln aufzustellen, die am angemessensten den beobachteten Reaktionen eines Kindes gerecht werden. So lassen sich zumindest mehrere Regeln bzw. Prozeßverläufe vorstellen, die einen relativ hohen Zusammenhang mit den Reaktionen des Kindes haben können, und dennoch die Regelhaftigkeit im Verhalten des Kindes nicht angemessen erfassen. Beobachtet man Kinder z. B. bei Zählaufgaben, so stellt man eine hohe Variabilität in ihren Verhaltensstrategien fest: Veränderungen im Verhalten des Kindes von einer Aufgabenstellung zur anderen bzw. innerhalb von wenigen Tagen deuten auf eine flexible und geschickte Weise hin, auf sich verändernde Anforderungen der Aufgabe einzugehen. Diese Flexibilität wird nur unzureichend konzeptualisiert (vgl. Easley, 1980, S. 20): Fehler konnten nach Ansicht Easleys dadurch zustande kommen, daß Kinder verschiedene Strategien parallel verarbeiten, ohne vorher zu entscheiden, welche der Strategien zu welchem Zeitpunkt im Lösungsablauf verwendet werden muß. Die Lösungsmethode des Kindes ist dann unzureichend koordiniert und führt z.B. beim Zählen zu Fehlern.

Durch die Befreiung von einer rigiden (axiomatischen) Definition des Zahlbegriffs, erscheint der Versuch, die Zahl auf einem spezifischen logischen Prinzip oder dem Zusammenwirken mehrerer logischer Prinzipien (wie bei Piaget) zu begründen, weniger überzeugend. Greift man den Vorschlag von Scandura und Scandura auf,

daß es beliebig viele Prozeßverläufe geben kann, die ein bestimmtes Konzept erzeugen bzw. ihm zugrundeliegen, wird deutlich, welche Schwierigkeiten es machen müßte, formale Ähnlichkeiten zwischen verschiedenen Aufgabenstellungen aus dem Zahlbereich aufzustellen. Die Divergenz und Mehrdeutigkeit der beteiligten operativen und logischen Vorgänge, die im Zusammenhang mit der "Zahl" stehen können, machen es wahrscheinlich, daß es eine gewisse Anzahl von relativ autonomen Aspekten der Zahlentwicklung geben kann, deren Entwicklungsbeziehungen untereinander systematisch aufgeklärt werden müßten. Operative Vorgänge (z.B. im Rahmen der Zahlinvarianzaufgabe) bilden einen strukturellen Aspekt der Zahlbegriffsentwicklung ab, indem sie die Bedeutung von räumlichen Transformationen für den Vergleich von Mengen aufgreifen, das bedeutet räumliche und zeitliche Veränderungen in ihrer Beziehung zur numerischen Äquivalenz. Die Zahlentwicklung schließt darüber hinaus das Verständnis systematischer Ordnungsbeziehungen ein, die räumliche und zeitliche Ordnung des Zählvorgangs, die Ordnungsrelationen innerhalb der Reihe der natürlichen Zahlen, die Ordnungsbeziehungen zwischen verschieden großen (innerhalb der Zahlreihe wohlgeordneter) Mengen. Damit drängt sich auch die Frage auf, welche Beziehungen zwischen den Ordnungsbeziehungen innerhalb der natürlichen Zahlen und dem Verständnis des Kindes für die Seriation von Objekten entlang einer gewissen Dimension bestehen (und damit asymmetrische und transitive Relationen zwischen verschieden großen Elementen). Weiterhin sind Aufgaben der Klassifikation bzw. hierarchischen Inklusionsbeziehungen zwischen Klassen von Bedeutung, weil sie zu dem Vergleich gleichgroßer Mengen und verschiedenen Vergleichsoperationen (Korrespondenz, Zählen) und der möglichen Verschachtelung zwischen unterschiedlich großen Mengen in Relation gesetzt werden können. Man muß sich aber stets bewußt bleiben, daß die formale Äquivalenz zwischen Aufgaben bzw. Aufgabenklassen, nicht bedeuten muß, daß die kognitiven Strategien oder Regeln, nach denen das Kind diese Aufgaben löst, identisch sein müssen. Deshalb können auch die Entwicklungsprozesse, die formal ähnlich erscheinenden Aufgabenklassen zugrundeliegen deutlich verschieden sein.

Um diese Formulierung zu veranschaulichen: die Addition von (hierarchischen) Klassen und die Teilmengenbildung bei der Addition bzw. Aufteilung von Mengen ganzer Zahlen kann auf formaler Ebene ähnlich erscheinen - darin muß man Piaget zustimmen -; die Lösungsmethode, die das Kind für die beiden Aufgabenarten anwendet, kann dagegen völlig verschieden sein, z.B. könnte das Kind im ersten Fall Wechselbeziehungen zwischen qualitativen Klassen berücksichtigen, bei der Addition aber auf numerische Vergleiche zurückgreifen (Noelting, 1975). Obwohl in beiden Aufgabenklassen eine Teil-Ganzes Beziehung definiert ist, wird sie auf verschiedene Weise repräsentiert; und es könnte sein, daß ein Kind mit 7 oder 8 Jahren erst "nachträglich" formale Ähnlichkeiten zwischen Aufgaben entdeckt, deren Lösungsregeln es nun beherrscht (vgl. Piagets Arbeiten zur "Generalisierung", Piaget, 1978 a).

9. Lösungsmodelle für spezifische Aufgabenklassen, Erörterung von Fertigkeits- und Regelmodell:

Im zweiten Teil wird ein Literaturüberblick über empirische Studien zum Zahlverständnis von Vorschulkindern gegeben. Diese Untersuchungen belegen u.a., auf welch verschiedenartigen Ebenen das Kind Zugang zu Zahlen und numerischen Vergleichen findet. Vergleicht man das Wissen und die Flexibilität mit der Vorschulkindern mit dem Zählen, Mengenvergleichen und einfachen Operationen umgehen können (vgl. Ginsburg, 1980; Gelman, 1980), erstaunt es im Grunde, daß die logisch begründeten Theorien der Zahlentwicklung - und besonders Piagets Theorie - jene konkreten Erfahrungen des Vorschulkindes ignorieren oder eine untergeordnete Bedeutung zumessen. Piaget erörtert das Zählen meist nur, um seinen nicht-operativen Charakter zu belegen. Und der ordinalen und kardinalen Theorie gleicht das Zählen nur dem Zuordnen symbolischer Kennzeichnungen oder Etiketten: Das Kind "benennt" mit den Zahlen Ordnungsbeziehungen bzw. logische Beziehungen, die es bereits abstrahiert hat.

Indem diese Theorien, die "Wissensbereiche" festlegen, in denen das Kind seine Fertigkeiten im Umgang mit Zahlen anwendet, begrenzen sie zugleich die "Erfahrungsbereiche", aus denen das Kind sein Wissen über Zahlen ableiten soll. Diese Eingrenzung leitet sich aus formal-logischen Begründungen ab, die für die

Definition und axiomatische Grundlegung des Zahlbegriffs (des Begriffs der natürlichen Zahlen) ein bestimmtes logisches Prinzip für notwendig halten. Die ordinale Theorie behauptet etwa, das Verständnis für formale Ordnungsbeziehungen (asymmetrische transitive Relationen) sei aus logischen Gründen ausreichend für den Erwerb des Zahlbegriffs. Es gibt nur wenige zwingende Gründe - außer einer allgemeinen Behauptung einer Isomorphie zwischen Mathematik und alltäglichen Erfahrungen des Kindes -, weshalb logische Deduktionen in der Mathematik die Entwicklungslogik und das Zusammenspiel konkreter Erfahrungen abbilden sollten.

Für die Annäherung an Entwicklungsprozesse im Vorschulalter stellt man sich am besten zwei Perspektiven vor. Die eine versucht, ausgehend von den einfachsten Fertigkeiten des Kindes, zu deuten, wie das Kind durch systematischen Erwerb neuer Fertigkeiten, deren Koordination und Automatisierung, und der Weiterentwicklung solcher Koordinationen auf einer veränderten repräsentationalen Ebene, ein komplexes Konzept wie den Zahlbegriff erwerben kann (vgl. Kaye, 1979; Fischer, 1980).

Die zweite bemüht sich, ausgehend vom "reifen" Konzept - hier des Zahlbegriffs (wenn man einmal von dem Problem seiner Definition absieht) - die strukturellen Beziehungen innerhalb des Konzepts aufzuklären (Kompetenzmodell) und die Regeln zu formulieren, die das Kind bei der Bewältigung des Konzepts kennen muß, um damit aus der Verbindung mit angenommenen "Begrenzungen" in der Entwicklung (z.B. operatives Verständnis; Gedächtnisleistung) abzuleiten, weshalb der Begriff zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Entwicklung erworben wird (vgl. Pascual-Leone et al., 1978; Case, 1980; Siegler, 1979; Scandura und Scandura, 1980).

Um der Entstehung des Zahlbegriffs besser gerecht zu werden, ist es sinnvoll, die Perspektive "von unten" mit der zweiten "von oben" zu verbinden. Betrachtet man die Zahlentwicklung unter dem Gesichtspunkt der Verbesserung und zunehmenden Koordination von Fertigkeiten (z.B. Schaeffer et al., 1974), wird man die Breite der konkreten Erfahrungen des Kindes im Umgang mit Zahlen eher berücksichtigen. Das Fertigkeitsmodell der Zahlentwicklung ist aber nur für einzelne Entwicklungslinien formuliert, z.B. den

Zählvorgang (Gelman, 1978) oder die Verwendung von quantitativen Strategien zum Vergleich von Mengen (Resnick et al., 1973). Auch gehen manche Fertigkeitsmodelle von einem sehr statischen Bild des Zusammenspiels verschiedener Aufgaben aus, da die Entwicklungsabfolge einer gewissen Zahl von Testaufgaben als normative Beschreibung des Entwicklungsverlaufs im Vorschulalter dient (vgl. die Modelle von Resnick, s. Wang et al., 1971; Resnick et al., 1973, Resnick und Ford, 1980; und von Schaeffer et al., 1974).

Hingegen geben die Arbeiten von Rachel Gelman ein anschauliches Bild des Zusammenspiels zwischen Teilfertigkeiten, deren Koordination und Automatisierung. Das Zusammenwirken einer größeren Zahl von Fertigkeiten wie beim Zählvorgang erklärt auch die Variabilität im Verhalten des Kindes in verschiedenen Aufgabenstellungen, ebenso wie die Flexibilität kindlicher Lösungsstrategien, wenn die Teilfertigkeiten hinreichend koordiniert sind (vgl. die Beispiele bei Easley, 1980).

Betrachtet man Fertigkeiten (skills) als "Ablaufschemas" (procedural schema, Piaget), die die innere Ordnung und das Zusammenwirken kindlichen Handelns koordinieren (1), so kann man sich verschiedene Merkmale von Fertigkeiten erarbeiten; Ein erstes Kennzeichen ist die Spezifität: Fertigkeiten sind zunächst an konkrete und spezifische Erfahrungskontexte gebunden, weil das Kind an ihnen den "Ablauf" seiner Handlungen geübt hat. Eine zweite Eigenheit ist die Koordination: Fertigkeiten sind bereits komplexe koordinierte Handlungszusammenhänge (vgl. Kaye, 1979); verschiedene Fertigkeiten lassen sich zu noch komplexeren Handlungsverläufen zusammenfügen, wobei sich verschiedene Formen der Komposition von Fertigkeiten beschreiben lassen (dazu Fischer, 1980). Koordinierte Fertigkeiten überträgt das Kind auf andere Erfahrungskontexte und/oder es rekonstruiert sie auf einer anderen repräsentationalen Ebene, z. B. wenn eine sensumotorische Handlung, wie das Zusammenfügen von Objekten (Langer, 1979) auf

(1) Besonders instruktive Modelle aus dem sensumotorischen Entwicklungsbereich beschreibt Kaye (1979).

der Vorstellungsebene als Korrespondenzbeziehung rekonstruiert wird (Generalisierung). Piagets Begriff der "reflektierenden Abstraktion" spricht den letzten Gesichtspunkt an (vgl. Piaget, 1976 a, b, sowie Fischer, 1980).

Koordinierte Fertigkeiten, die das Kind häufig übt, werden immer geschickter angewendet (Automatisierung). Typische Kennzeichen der Automatisierung ist einerseits die Effizienz, das bedeutet vor allem die Geschwindigkeit, mit der das Kind eine Handlungsfolge beherrscht (vgl. Zählen, Case, 1980), andererseits die reduzierte Aufmerksamkeit des Kindes für die einzelnen Schritte der Handlungsfolge, was dazu führen kann, daß das Kind vorher sequentiell ausgeführte Schritte parallel zueinander ausführen kann oder daß es redundante Schritte in der Handlung wegläßt. Schließlich hat das Kind ab einem gewissen Grad an Koordination und/oder Automatisierung einer Handlungssequenz bewußten Zugang zu den jeweiligen Fertigkeiten. Dies erlaubt es ihm, nicht nur die Folge von Handlungsschritten zu rekonstruieren - falls Teile der Handlung nicht bewußt sind -, sondern auch aus der inneren Struktur der Handlung Ordnungsbeziehungen abzuleiten (vgl. dazu Piaget, 1975). Ein anschauliches Beispiel dafür ist es, wenn ein Kind, das den Zählvorgang sehr gut beherrscht, beginnt die Ordnungsbeziehungen zwischen den Zahlen (z.B. 6 ist "Nachfolger" von 5) abzuleiten. Obwohl Piagets Arbeiten zur reflektierenden Abstraktion (Piaget, 1976 a, b) und zur "Generalisierung" (Piaget, 1978a) sich in erster Linie auf operative Vorgänge beziehen, haben diese Begriffe für die Entstehung einfacherer Handlungskoordinationen ebenfalls große Bedeutung.

Das Fertigkeitsmodell ist im Bereich der Zahlenentwicklung nur für den Zählvorgang detailliert angewandt worden (1). Es wäre im gleichen Maße sicherlich auch anwendbar für quantitative Vergleiche von Mengen durch das Kind, für die

(1) Eine Beschreibung des Zählens mit Hilfe dieses Modells findet sich im zweiten Teil.

Korrespondenzbeziehung oder für die Beschreibung von Ordnungsbeziehungen zwischen verschieden großen Objekten. Für solche Modelle fehlen aber präzise Beobachtungen zur allmählichen Entfaltung des kindlichen Verhaltens im Vorschulalter. Saxe (1977) illustriert diesen Ansatz für den "quantitativen" Vergleich von Mengen, indem er qualitative Niveaus für das kindliche Verhalten beim Mengenvergleich durch Zählen beschreibt. Um einen Überblick über die verschiedenen Entwicklungslinien des Zahlbegriffs zu geben, wurde folgende Tabelle zusammengestellt. Empirische Arbeiten zu diesen verschiedenen Bereichen werden im zweiten Teil dargestellt.

Tabelle "

Entwicklung des Zahlbegriffs/Veranschaulichung der
Verbesserung von Fertigkeiten

Zählen (Gelman/Fuson)

Koordinationsprinzipien (Eins-Eins Prinzip, Kardinationsprinzip stabile Ordnung der Zahlen	Koordination der Zählprinzipien Automatisierung des Zählvorgangs	+ Beseitigen redundanter Schritte (z.B. nur noch Ergebnisse nennen)
Anwendungsprinzipien (Beliebigkeit der Reihenfolge des Zählens; Abstraktionsprinzip (Abzählbarkeit von Objekten)	Ausdehnung der Aufgabenkontexte (quantitative Vergleiche; Addition etc.)	+ Erkennen der Regelmäßigkeit + Erkennen innerer Ordnungsprinzipien der natürlichen Zahlen + Abzählbarkeit des Zählens selbst

Korrespondenz

Koordination (elementare Abbildungsrelation)	Systematische Anwendung der Korrespondenz (z.B. auch durch Augenbewegungen)	Erkennen der Ähnlichkeit zur qualitativen Korrespondenz
Anwendungsprinzipien (räumliche Aspekte, die die Korrespondenz unterstützen/hemmen)	Loslösung von räumlichen Aspekten (mehrdeutige Reize werden ignoriert)	Erkennen der logischen Bedeutung der Korrespondenz

Transformation/Operation

Addition/Subtraktion von Elementen (Lösbarkeitsprinzip)	Addition/Subtraktion auf praktischer Ebene	Erkennen von Klassen von <u>Transformationen</u>
räumliche Verschiebungen Transformationen	Identität der Objekte trotz Transformation	

Räumliche Anordnung/kardinale Vergleiche

Quantitative Strategien zum Vergleich von Mengen (Zählen, Schätzen, Korrespondenz)	Ordnungsbeziehungen zwischen Mengen (Asymmetrie/Transitivität)	Erkennen von Regeln zum Vergleich von Mengen nach Aufgabenkontext
Ausdifferenzieren von zu vergleichenden Mengen	Aufteilen von Mengen	
	Verständnis für Aufgabenfaktoren, die eine bestimmte quantitative Strategie sinnvoll machen (Genauigkeit/Mehrdeutigkeit)	

Der Ansatz "von oben" kennzeichnet Kompetenzmodelle, d.h. relativ formale Beschreibungen der Leistungen, die ein Kind in einer bestimmten Aufgabe erfüllen muß. Sowohl Piagets Theorie als auch die beiden anderen Theorien der Zahlentwicklung sind Kompetenzmodelle des Zahlbegriffs. Die Mängel dieser Modelle wurden bereits ausführlich diskutiert; auch wurde schon erwähnt, daß eine Schwäche logischer Modelle des Zahlbegriffs oder der Arithmetik ihre formale Unentscheidbarkeit ist. Da die Definition des Zahlbegriffs selbst nicht präzise eingegrenzt werden kann, bieten logische Modelle keine Kriterien an, um die empirische Gültigkeit der genannten Theorien abzuschätzen.

Diese Modelle haben eine weitere Schwäche, die offensichtlich wird, wenn man sie auf eine konkrete Aufgabe anzuwenden versucht: sie erlauben nicht den inneren zeitlichen Aspekt der kognitiven Leistung abzubilden, d.h. wie das Kind verschiedene Informationen verarbeitet, koordiniert und zu einem Urteil kommt. Kurz: sie sind keine Performanzmodelle. Dennoch eignen sich die logischen Theorien dafür, ein Bild der formellen Relationen innerhalb einer Aufgabe zu bekommen; Piagets Theorie beschreibt Aufgaben und kognitive Leistungen gleichsam unter "idealisierten Bedingungen".

Es ist hier nicht möglich, auf verschiedene Performanzmodelle einzugehen; einige wurden im Rahmen der Diskussion der Zahleninvarianzaufgabe kurz erwähnt. Von besonderem Interesse sind theoretische Ansätze, die die Position Piagets weiterzuentwickeln suchen (Siegler, 1979; Pascual-Leone, 1979; Case, 1980; Scandura und Scandura, 1980). Für die folgende Erläuterung der Perspektive "von oben" wurden die letzten Autoren ausgewählt, weil ihre Arbeit eine interessante Koordination mit dem Fertigkeitenmodell verspricht.

In Scanduras struktureller Lerntheorie werden kognitive Aufgaben durch die Formalisierung der Regeln repräsentiert, die der Lösung der Aufgabe zugrundeliegen. Regeln sind gekennzeichnet durch ihren Anwendungsbereich (domain) (der Gegenstandsbereich auf den die Regeln angewendet werden), ihre Ergebnisse und durch die spezifischen Prozeduren, die sie festlegen (d.h. ihren operativen Aspekt). Regeln haben verschiedene Rangstufen, wobei Regeln "höherer Ordnung" und solcher "niederer Ordnung" in konkreten Problemsituationen bei dem Lösungsprozeß des Kindes zusammenwirken.

In ihrem Modell der Invarianzaufgaben gehen Scandura und Scandura (1980, S. 42 ff.) von einer "idealisierten" und "automatisierten" Regel höherer Ordnung aus, die die Konsequenz der Transformation in einer beliebigen Invarianzaufgabe beschreibt. Dieser allgemeinen Regel liegen spezifischere "Lösungsregeln" zugrunde, die aber auch eine relativ hohe Gültigkeit haben. Transformationsregeln beschreiben die Konsequenzen von Klassen von Operationen (z.B. Addition/Subtraktion von Elementen bei der Zahleninvarianz, vgl. Brush, 1978); Generalisierungsregeln kennzeichnen die Möglichkeit, "Variablen oder Klassen von kritischen Transformationen" für einander zu ersetzen (eine Transformationsklasse hat das gleiche Ergebnis wie die andere). Alle diese Regeln sind ^{von} "höherer Ordnung" und ihre Anwendung erfolgt automatisch. Im Laufe der Entwicklung erwirbt das Kind jedoch erst die verschiedenen Entscheidungen über Konsequenzen einer Transformation, bevor es eine Klasse von Transformationen zusammenfassen kann (vgl. die Beispiele bei Hofmann und Trepanier,

1975).

Diesen einzelnen Entscheidungen des Kindes liegen wiederum als notwendige (wenn auch nicht hinreichende) Vorbedingungen sogenannte "Vergleichsregeln für Konzepte" (concept comparison rules) zugrunde, mit denen das Kind den Zustand der Objekte vor und nach der Transformation vergleicht, ebenso wie die Vergleichbarkeit der Anordnungen vor der Transformation (man denke an die Zahleninvarianzaufgabe).

Die verschiedenen Regeln erwirbt das Kind aus einer Vielzahl konkreter Erfahrungen mit Vergleichen zwischen Anordnungen von Objekten und einzelnen Transformationen, anhand derer es allmählich Anwendungsbereiche und Gültigkeit der Regeln ableitet. Bildet das Kind Regeln höherer Ordnung (die z.B. für Klassen von Transformationen gelten), wirken diese abstrakteren Regeln, die bereits automatisiert sind, mit weniger abstrakteren, nicht automatisierten Regeln zusammen. Dieses Zusammenwirken hat zur Folge, daß einfachere Entscheidungsprozesse des Kindes in der Aufgabe allmählich automatisiert werden, das bedeutet z.B., daß redundante Schritte aufgehoben werden (Scandura und Scandura, 1980).

Dieses Modell erlaubt es, zu veranschaulichen, wie konkrete Erfahrungen des Kindes in spezifischen Problemsituationen (in unserem Beispiel Erfahrungen im Vergleich mit Mengen) dem Kind ermöglichen, Regelmäßigkeiten innerhalb dieser Problemstellungen zu erkennen. Bei der Zahleninvarianzaufgabe betreffen diese Regeln einerseits den Vergleich der beteiligten Mengen zwischen verschiedenen Zuständen (z.B. vor und nach der Transformation), andererseits die Beurteilung der Konsequenzen verschiedener Transformationen bzw. Klassen von Transformationen. Scandura und Scandura (1980) versuchen dieses Modell anhand einer Trainingsstudie mit Invarianzaufgaben zu verdeutlichen und zugleich zu belegen.

Welche Gemeinsamkeiten bestehen nun zwischen Fertigkeitsmodell und Regelmodell? Ausgangspunkt der Diskussion war die formale Unterscheidbarkeit logischer Modelle. Die Lösungsprozeduren, die

das Kind bei einer bestimmten Klasse von Aufgaben anwendet (z. B. Zahlinvarianzaufgabe; Additionsaufgaben) sind in ihrer Variabilität und Flexibilität nicht durch eine logische Beschreibung der Relationen innerhalb der Aufgabe begrenzt. Es wurde auch argumentiert, daß der Versuch den Zahlbegriff selbst mit einer bestimmten logischen Relation zu identifizieren nicht Überzeugend ist. Sind sowohl die Definition der Konzepte - nämlich des Zahlbegriffs - als auch die Wege, auf denen das Kind das Konzept erwerben kann, vieldeutig, ist es für die Entwicklungspsychologie sinnvoll, theoretische Ansätze zu formulieren, die dieser Mehrdeutigkeit Rechnung tragen. Fertigkeitenmodelle und Regelmodelle haben hier ihre gemeinsamen Stärken: ihr Ausgangspunkt sind "konkret-spezifische Problemsituationen" (Scandura), denen das Kind in seinem Alltag begegnet; damit vermeiden sie den "Erfahrungsbereich", denen das Kind sein Wissen über Zahlen entnehmen kann, einzugrenzen; sie erlauben die Konstruktion und/oder Beschreibung mehrdeutiger Lösungsmodelle, weil sie dem Kind originelle Strategien zubilligen, die aus der Automatisierung spezifischer Fertigkeiten und/oder Regeln herführen. Die Automatisierung selbst wiederum ist durch praktische und intensive "Übungen" des Kindes zu erklären. Beide Modelle sind im Grunde in den größeren theoretischen Rahmen der Informationsverarbeitung eingeordnet.

"... gewisse Einsichten in die Natur der Zahl eröffnen Aspekte ihrer Struktur, die eine bedeutsame Rolle in allen Lernprozessen spielen. Eines (von vielen) könnte man das Prinzip des Aufteilens (Factoring) nennen: Strukturen kann man sich aus einfacheren aber noch signifikanten Teilen (Substrukturen) zusammengesetzt vorstellen, die leichter erlernbar sind. Man könnte grundlegende Theorien entlang einer Dimension der Erlernbarkeit (learnability) ordnen: die Zahl 'à la Peano' oder die rekursive Funktionstheorie steht am nicht erlernbaren Pol; die Zahl 'à la Russell/Whitehead' ist eher erlernbar, die Zahl 'à la Bourbaki/Piaget' ist noch wesentlich stärker erlernbar, und AI (1) Ausweitungen der letzten gehen noch weiter" (S. Papert, in Piatelli-Palmarini, 1980, S. 98).

(1) Artificial Intelligence

2. Teil

WELCHES VERSTÄNDNIS HABEN VORSCHULKINDER VON ZAHLEN? Überblick über wichtige Indikatoren

1. Besonderheiten des Zählvorgangs und Entwicklung des
Zählens S. 74
2. Formale Arithmetik und Zahl - numerische Urteils-
prinzipien von Vorschulkindern S. 85
3. Quantitative Vergleiche im Vorschulalter S. 90
4. Aufmerksamkeit und Reizpräferenzen bei kardinalen
Aufgaben S. 102
5. Verständnis von Vorschulkindern für "praktische"
arithmetische Operationen S. 118

+++++

Welches Verständnis haben Vorschulkinder von Zahlen?

Überblick über wichtige Indikatoren.

Der zweite Teil stellt wichtige Entwicklungsbereiche zusammen, in denen sich das Wissen und/oder die Fertigkeiten von Vorschulkindern im Umgang mit Zahlen und dem Vergleich von Mengen andeuten. Sowohl die Art der Darstellung als auch die Auswahl empirischer Studien ist selektiv. Bei der Diskussion verschiedener Entwicklungsbereiche wird großer Wert darauf gelegt, die formalen Prinzipien zu erläutern, die dem Verständnis des Kindes zugrunde liegen. Auch in relativ begrenzten Verhaltenskompetenzen von Vorschulkindern sind innere strukturelle Beziehungen enthalten (z.B. Ordnungsprinzipien), die die weitere kognitive Entwicklung mitprägen. Der Zählvorgang, der zuerst diskutiert wird, ist exemplarisch für diesen Gedanken. Empirische Untersuchungen wurden gleichermaßen ausgewählt, um Hinweise und Anregungen für die qualitativen Besonderheiten des kindlichen Wissens über die Zahl zusammenstellen zu können. Den Arbeiten Gelmans wird daher besonderes Gewicht zugebilligt.

Die Übersicht gliedert sich in fünf größere Abschnitte. Nach der Darstellung formaler Eigenheiten des Zählens und der Entwicklung des Zählens werden Gelmans Arbeiten über die numerischen Urteilsprinzipien von Vorschulkindern erläutert. Daran schließen sich Diskussionen über zwei beliebte Forschungsgebiete der Zahlentwicklung an. Einmal geht es um die Fähigkeit von Kindern im Vorschulalter, numerische Vergleiche zwischen Mengen explizit herzustellen; der gleiche Punkt wird in anderem Zusammenhang behandelt, wenn es darum geht, den Einfluß von räumlichen Faktoren auf Mengenvergleiche (kardinale Vergleiche) zu klären. Schließlich wird an einigen exemplarischen Arbeiten erörtert, welches "mathematische Wissen" Vorschulkindern (z.B. im Hinblick auf arithmetische Operationen) noch zugänglich ist.

1. Besonderheiten des Zählvorgangs und Entwicklung des Zählens

Eine Analyse der Komplexität des Zählvorgangs macht deutlich, welche kognitive sensumotorische Leistung das Kind im Laufe des Vorschulalters erwirbt. Zum einen erfordert der sensumotorische Ablauf des Zählens eine planende Strategie: das Kind muß sich in einer Richtung (linear) systematisch vorwärts bewegen, und jedes Objekt einmal und nur einmal berühren. Welche Schwierigkeit gerade der letzte Vorgang jüngeren Vorschulkindern macht, zeigten Potter & Levy (1968) in ihrer Untersuchung. Darüber hinaus erwerben Vorschulkinder räumliche Strategien, die es erlauben, auch verteilte Gruppen von Objekten zu zählen, relativ spät (vgl. Shannon, 1978).

Lautes Aufsagen der Zahlwörter bietet zudem noch keine Gewähr, daß das Kind diese Abfolge von Zahlwörtern effektiv einsetzen kann, um eine Gruppe von Objekten abzuzählen (Ginsberg, 1977, S. 20). Das Kind muß sensumotorische Aspekte des Zeigens und des linearen Fortschreitens mit der definierten Abfolge der Zahlwörter systematisch koordinieren. Die Verfeinerung und Verbesserung der Zählfertigkeiten erfordert eine umfangreiche Übung bis die verschiedenen Teilaspekte automatisiert sind.

Der inneren Ordnung des Zählvorgangs wurde bislang wenig Aufmerksamkeit geschenkt (vgl. aber Brouwer, Hilbert), obwohl das Kind eine komplexe Ordnungsbeziehung zwischen einer festgelegten sprachlichen Folge von Symbolen und sensumotorischen Handlungen herstellt (vgl. Blank, 1974, zur Bedeutung der Sprache für die Strukturierung zeitlicher Abfolgen bei Vorschulkindern). Neben die räumliche Beziehung, die u.a. durch die Anordnung der Objekte mitbestimmt wird, tritt eine zeitliche Abfolge, die das Kind durch die Korrespondenz zwischen Sprache und Objekten konstituiert.

Das Zählen als komplex koordinierte Fertigkeit entwickelt sich allmählich zu größerer Ökonomie und Effizienz, bis das Zählen auch für arithmetische Vorgänge z.B. für die Addition (Ginsburg, 1977, S. 92-95) oder die wiederholte Addition (und damit die

Multiplikation) eingesetzt werden kann. Die Ausweitung der Ordnungsbeziehungen, die dem Zählvorgang inhärent sind, fällt Vorschulkindern noch überaus schwer, z.B. wenn sie Liniern oder Striche für Zahlen verwenden sollen, um so den Zählvorgang zu symbolisieren (z.B. Strichlisten, $I + II = III$).

Daß die Zählreihe dem Kind selbst Gegenstand der Betrachtung wird, steht außer Zweifel. Beispielsweise erkennt das Kind relativ früh einfache Ordnungsfunktionen innerhalb der natürlichen Zahlen (z.B. Einerschritte) (vgl. Ginsburg, 1977, S. 166-167), die es ihm auch erlauben, mehrere Zahlen zu einer Gruppe zusammenzufassen und z.B. in Zweierschritten oder Dreierschritten vorzugehen. Das Verständnis solcher Ordnungsbeziehungen wird weitergeführt, wenn das Kind lernt, erst ab einer gewissen Zahl zu zählen (z.B. ab 5 ...), und schließlich rückwärts zählen kann bzw. von einer bestimmten Zahl aus die Zahlreihe rückwärts durchlaufen kann (vgl. Fuson, 1980 a,b).

Berücksichtigt man solche strukturellen Beziehungen, so versteht man, wie natürliche Zahlen auch als Zählzahl mit eigenständigem Status denkbar sind (Wittman, 1975), deren innere Ordnungsrelationen und iterative Beziehung (+1) nicht auf logische Prinzipien reduzierbar sind. Schließlich werden auch die Zahlwörter selbst durch (synthetische) Regeln konstruiert, z.B. beim allmählichen Ausweiten des Positionssystems (so Ginsburg, 1977, S. 5-7 zu Beispielen mit Zehnerübergängen).

Der Zählvorgang ist vergleichbar dem Herstellen einer Korrespondenzbeziehung, einer Korrespondenz zwischen dem jeweiligen Objekt und dem jeweiligen Zahlwort. "Jedem Objekt wird eine einzige Zahl zugewiesen und jede Zahl (...) ist einem gewissen Objekt der Anordnung zugeordnet" (Goodstein, 1957, S. 2). Die Äquivalenz zweier Anordnungen von Mengen ist daher über den Zählvorgang bestimmbar. Goodstein bemängelt die logische Definition der Zahl bei Russell in der die Ähnlichkeitsbeziehungen zwischen Anordnungen von Objekten durch die Korrespondenzrelation

definiert werden. Wie kann, so betont er, das "schwer faßbare Konzept der Zahl durch das gleicherweise schwer faßbare Konzept der Korrespondenz" aufgeklärt werden (Goodstein, 1957, S. 3).

Die Definition des Zählens geht für Goodstein (op cit., S. 8 f.) von einer Deutung des Prozesses des Zählens aus. Beim Zählen tun wir zwei Dinge: einmal sehen wir, wenn wir eine Anordnung von Objekten zum Zählen zusammenfassen, von den qualitativen Besonderheiten der Gegenstände ab, um sie für den Zweck des Zählens als gleich behandeln zu können; zum anderen ist das Zählen selbst verstehbar als eine Transformationsregel beim Abzählen: Eins und eins gibt zwei, zwei und eins gibt drei, drei und eins gibt vier. Das "und eins" wird beim koordinierten Zählen weggelassen, indem das erhaltene Zahlwort unmittelbar zugeordnet wird. Zählen könnte man so als Etikettieren verstehen. Formalisiert man die Transformationsregel, die dem Zählen zugrundeliegt, so wird der Nachfolger stets durch die Nachfolgefunktion $(x + 1)$ definiert: $N(1) = 1$, $N(L + 1) = N(L) + 1$. Diese formelle Definition bestimmt somit ein rekursives Schema: die Funktion $N(L)$ ist nicht definiert, sondern kann erst beschrieben werden, wenn im Vorgehen - Schritt um Schritt - L als Anzahl einer Kollektion bestimmt wurde.

Diese Beschreibung des Zählvorgangs ist eingebettet in die abstraktere Darstellung der Arithmetik als formales System, wonach die verschiedenen arithmetischen Operationen und Funktionen aufgrund von Transformationsregeln bestimmt werden können, die auf Variablen (nämlich Zahlen) angewandt werden (vgl. Goodstein, 1957, Kap. I, S. 16 ff.). An anderer Stelle vergleicht Goodstein in diesem Sinne die Mathematik treffend mit dem Schachspiel. Operationen in der Arithmetik sind vergleichbar den Zügen im Schach, so wie die Zahlen dann mit den Figuren des Schachs identifizierbar werden können. Die Arithmetik beschäftigt sich daher mit den "Transformationsregeln der Zeichen", die einmal eingeführt wurden, aber nicht eigentlicher "Gegenstand der Untersuchung" sind (Goodstein, 1957, S. 5,6).

Man muß sich bewußt machen, daß die Prinzipien des Zählens Regeln festlegen, wonach die natürlichen Zahlen in der täglichen Erfahrung Anwendung finden. Castaneda (1959) zeigt an der Diskussion von Gaskings "verschrobener Arithmetik" (queer arithmetic), in der die propositionalen Beziehungen zwischen den natürlichen Zahlen durch eine Neudefinition der Multiplikationsregel verändert werden, wie sehr Zählvorgang und "gewöhnliche" Arithmetik zusammenhängen. Eine Veränderung der formellen elementaren Operationen in der Mathematik würde, um angemessen durchführbar zu sein, ein verändertes Konzept des Zählens erforderlich machen. Umgekehrt gesprochen: die natürliche Sequenz der Zahlen (wie sie in den Peano-Axiomen festgehalten werden soll) und die darauf definierten Operationen sind eng verwoben mit dem technischen Aspekt des Zählens (wie die Zahl der Objekte in einer Anordnung bestimmt wird) (vgl. Castaneda, 1959). Dedekind selbst hat dieses Verständnis der Arithmetik am klarsten ausgedrückt, indem er die Arithmetik als "notwendige, oder zumindest natürliche Folge der einfachsten arithmetischen Handlung, nämlich des Zählens" ansah (zitiert nach Brainerd, 1979, S. 45).

Karen Fuson deutet in ihrer Arbeit (1980 a) die Sequenz der Zahlwörter als "Repräsentationsinstrument" (representational tool), dessen Anwendungsbereiche und Anwendungsmöglichkeiten sich kontinuierlich im Laufe der Entwicklung erweitern. Beginnt das Kind die Zahlwortfolge systematisch anzuwenden, kann es die Zahlwörter selbst als "Gegenstände betrachten, die gezählt werden". Das erlaubt es ihm, das Zählen als Lösungsprozeß bei einfachen arithmetischen Operationen anzuwenden (Addition, etc., Fuson, 1981). Die Zählreihe ("standard sequence") wird von Kindern im Laufe des Vorschulalters erworben (Fuson, 1980 a, 1980 b, Gelman & Gallistel, 1978, Gast, 1957, Saxe, 1977, 1979).

Für R. Gelman ist erfolgreiches Zählen mit der koordinierten Anwendung von fünf Prinzipien identisch (Gelman, 1977, 1978, 1979, 1980; Gelman & Gallistel, 1978). Diese Prinzipien werden

kurz folgendermaßen definiert: (1) das Eins-Eins Prinzip: jedes Element in einer Anordnung bekommt ein und nur ein "Etikett", d.h. ein Zahlwort zugeordnet; (2) das Prinzip der stabilen Ordnung, das erfordert, daß die Etiketten einer eindeutig geordneten Liste entnommen werden (Zahlenfolge); (3) das Kardinalitätsprinzip - das letzte Zahlwort (Etikett) in der abgezählten Folge benennt die Kardinalzahl der gezählten Menge; (4) das Abstraktionsprinzip, das besagt, daß beliebige Objekte - gleichgültig welche qualitativen Merkmale sie haben - zu einer Menge zusammenfaßbar sind und gezählt werden können; (5) das Prinzip der beliebigen Reihenfolge: die Reihenfolge, in der die Gegenstände einer Anordnung gezählt werden, ist beliebig und beeinflußt nicht die Kardinalzahl.

Die Zählprinzipien selbst bauen sich aus Teilfertigkeiten auf (das Eins-Eins Prinzip erfordert zwei Komponenten, nämlich das Aufteilen einer Menge in zu zählende und schon gezählte Objekte, und das kontinuierliche und geordnete Etikettieren der Objekte), in denen sich das Kind allmählich so perfektioniert, daß das jeweilige Prinzip konsistent angewendet wird (Gelman, 1978, S. 214). Indem das Kind die Prinzipien allmählich koordiniert, verbessert es seine Kompetenz beim Zählen. Dies gilt in erster Linie für die drei ersten Prinzipien; die das "Wie", also den Prozeß des Zählens ausmachen. Die zunehmend koordinierten Prinzipien konstituieren ein Schema - im Sinne Piagets -, das das weitere Zählverhalten des Kindes leitet und motiviert. Zählen ist nicht nur eine Wiederholung einer Zahlenfolge, sondern eine komplexe kognitive Leistung. Wie später noch dargestellt wird, sieht Gelman auch einen engen Zusammenhang zwischen den Zählfertigkeiten des Kindes und seinen Fähigkeiten, über Anordnungen von Objekten numerische Urteile anzustellen. Sobald das Kind über den Zählvorgang numerische Repräsentationen von (kleinen) Mengen von Objekten gewinnen kann, setzt es diese Repräsentation auch für kognitive Urteile ein. Das Abstraktionsprinzip hat Gelman noch nicht systematischer untersucht, obwohl sie eine kleine Studie beschreibt, die besagt, daß 3- und 4-jährige Kinder bereit sind, belebte und nichtbelebte Dinge als Menge zusammenzufassen und zu zählen

(Gelman, 1980, S. 62).

Das Prinzip der beliebigen Reihenfolge beim Zählen enthält zwei wichtige kognitive Leistungen. Einmal erkennt das Kind, daß ein Etikett einem beliebigen Objekt zugeordnet werden kann (systematische experimentelle Studien dazu finden sich in Gelman und Gallistel, 1978, S. 141-159). Unter anderem untersuchten Merkin und Gelman (vgl. Gelman, 1980, S. 63) die Fähigkeit des Kindes, die Reihenfolge voranzuplanen, nach der die Objekte in einer Anordnung gezählt werden. Dieses strategische Zählen bewältigen immerhin 75 % der 5-jährigen Kinder. Zum anderen begreift das Kind, daß die Reihenfolge, nach der die Objekte abgezählt werden, die Kardinalzahl der Menge nicht beeinflußt. Wendet das Kind die anderen Zählprinzipien koordiniert und konsistent an, ist dies nicht problematisch, da es bei jeder Reihenfolge auf dasselbe Ergebnis kommt. Wie sicher oder unsicher reagiert das Kind, wenn es mehrfach ein anderes Ergebnis findet? Daten zu dieser Frage finden sich bei Gelman nicht. Veranschaulicht man sich den Grad an Abstraktheit der fünf Zählprinzipien, so beobachtet man, daß die ersten Prinzipien die elementare Koordination innerhalb des Zählvorgangs beschreiben, während die anderen Prinzipien den Anwendungsbereich bzw. die Flexibilität des Zählvorgangs kennzeichnen. Die beiden abstrakteren Prinzipien setzen - wie bereits erwähnt - die erfolgreiche Anwendung der elementaren Prinzipien voraus. Sie erfordern zugleich eine andere Repräsentation des Zählvorgangs, indem der inneren Koordination des Zählens eine planende Strategie vorausgehen muß. Obwohl Gelman die weitere Entwicklung der Zählprinzipien nur vorsichtig umschreibt, kann man vermuten, daß die Zählprinzipien und der Zählvorgang selbst eine zunehmende Koordination und damit Effizienz erreichen. Ein Indiz dafür sind 5- und 6-jährige Kinder (und manche 4-jährige), die beginnen, leise zu zählen; diese Kinder müssen sich der elementaren Zählprinzipien, insbesondere des Eins-Eins Prinzips völlig sicher sein. Auch die erhöhte Geschwindigkeit des Zählvorgangs ist ein Anzeichen der geschickteren Anwendung des Zählschemas (Case, 1980). Die Automatisierung von Komponenten des Zählvorgangs vermindert

die kognitive Leistung für das Kind erheblich.

Aufbauend auf diesem Wissen finden sich weitere Änderungen im Umgang des Kindes mit Zahlen zwischen 5 und 8 Jahren.

"Übung und Reifung tragen zu einer Zunahme in der Geschwindigkeit des Zählens von Gegenständen bei" (Fuson, 1980 a, S. 2). Fuson beschreibt eine Untersuchung von Case, Kurland und Dareman (1979), die die Geschwindigkeit erhoben, mit der 4-jährige, 6-jährige und Erwachsene Karten abzählen können. Die erhebliche Zunahme in der Geschwindigkeit und damit der "operationalen Effizienz" (Erwachsene zählen etwa viermal so schnell wie Kinder), erlaubt es dem Kind, einen Teil seiner Verarbeitungskapazität zu verwenden, um beim Abzählen einer Menge "noch etwas anderes zu tun" (Case et al., 1979) (1), z.B. auf die gezählten Objekte zu achten, auf die Zahlwörter selbst und ihre inneren Wechselbeziehungen aufmerksam zu werden und die bereits abgezählte Menge zu behalten.

Welche Bedeutung diese parallele Verarbeitung verschiedener Informationen haben könnte, veranschaulicht das "counting-on"-Modell der Addition, nach dem das Kind die Lösung einer Additionsaufgabe dadurch findet, daß es die Sequenz der Zahlwörter - losgelöst vom direkten Bezug der Gegenstände - mit der zweiten (zu addierenden) Menge weiterführt und so zur Gesamtsumme kommt (z.B. $5 + 3 = 5, 6, 7, 8 (= 8)$) (vgl. Groen & Resnick, 1977; Resnick & Ford, 1980; Fuson, 1981). Für solch eine Lösungsprozedur muß das Kind offensichtlich parallel zum bloßen Zählen verschiedene Informationen über die beteiligten Mengen verarbeiten, um die Abfolge der Lösungsschritte nicht zu vermischen.

"Case et al. zeigten auch, daß durch intensives Üben des Zählens (über 800 Durchgänge) die Geschwindigkeit des Zählens bei 4-jährigen Kindern erhöht werden kann."

(1) Weitere Details der Untersuchung und die Einordnung in die theoretische Position von Case findet sich in Case (1980).

Die erhöhte Effizienz und Koordiniertheit im Prozeß des Zählens ermöglicht es dem Kind, auf verschiedene Aspekte der Zahlwortsequenz aufmerksam zu werden und die inneren Ordnungsbeziehungen innerhalb dieser Sequenz allmählich zu objektivieren. So entdeckt das Kind auch die unterschiedlichen Bedeutungszusammenhänge, in der die Anzahl einer Menge verwendet wird. Beispiele für die objektivere Sicht der Zählreihe zeigen sich zunächst daran, daß das Kind - nachdem es die Zahlwortfolge intensiv geübt hat - an einem beliebigen Punkt in der Zahlfolge beginnen kann, und einen Ausschnitt aus der Folge der natürlichen Zahlen erstellen kann. Implizit versteht das Kind damit, die Ordnungsrelationen innerhalb der Zahlsequenz, z.B. daß ein bestimmtes Zahlwort zwischen zwei anderen liegt, oder daß ein Zahlwort Nachfolger bzw. unmittelbarer Nachfolger eines anderen ist (vgl. Fuson, 1980 a, S. 3-4). Systematische Ordnungsbeziehungen erlauben es dem Kind, jedem Zahlwort eine bestimmte Bedeutung zuzuweisen; "Bedeutungen, die Zahlworte und andere Zahlwörter miteinander in Verbindung bringen" (Fuson, 1980, S. 4). Das Kind versteht gleichsam die "alphabetische Ordnung" der Zahlen, nicht als assoziative Kette im Sinne der lerntheoretischen Sicht, sondern als komplexe Bedeutungszusammenhänge, in die die Zahlen eingeordnet sind. Daneben erwirbt das Kind die Bedeutung von kardinalen Beziehungen ("wieviele Elemente enthält eine bestimmte Menge") und ordinalen Beziehungen (Beziehungen eines bestimmten Objekts in Relation zu einer ganzen geordneten Menge von Objekten). Obwohl kardinale und ordinale Kennzeichnungen für das Kind zunächst an spezifische Lösungskontexte geknüpft bleiben, ist es der Zählvorgang selbst, der, indem er dem Kind die Wechselbeziehungen zwischen diesen unterschiedlichen Aspekten nahelegt, ihm den Weg zu einer abstrakteren Bedeutung von Kardination und Ordination zeigt. Die Koordination verschiedener Bedeutungen des Zahlworts (Zählfolge, Kardination, Ordination) ist es wiederum, die eine flexible Anwendung des Zählens beim Lösen einfacher arithmetischer Aufgaben gestattet, z.B. der Addition und der Subtraktion (vgl. Groen & Resnick, 1977; Ginsburg, 1977; Svenson & Broquist, 1975; Fuson, 1981).

Die Ordnungsbeziehungen innerhalb der Sequenz der Zahlwörter spiegeln sich auch in der Effizienz wider, mit der das Kind die Zahlen durchlaufen kann. Fuson & Richards (1979) nennen drei wichtige qualitative Unterschiede in der Produktion der Zählreihe. Die Produktion einer Kette ("chain production") kennzeichnet - wie früher bereits erwähnt - das beginnende Verständnis des Kindes für die innere Ordnung des Zählens, obwohl sie noch auf das Zählen mit Gegenständen beschränkt ist. Indem das Kind einzelne Elemente in der Zählreihe unterscheidet, kann es auch Folgerelationen erlernen (Nachfolger, etc.) und an einem beliebigen Objekt zu zählen beginnen. Die Produktion einer Zählkette wird von Fuson & Richards (1979) dem Altersbereich 3 1/2 bis 6 zugeordnet. Etwas später gelingt dem Kind auch die Konstruktion einer umgedrehten Zählreihe, d.h. es kann in der Zahlwortfolge rückwärts gehen (backward chain production). Beide Handlungssysteme - Vorwärtzzählen und Rückwärtzzählen - werden vom Kind allmählich soweit koordiniert, daß Teile der Handlungen automatisch ablaufen (ohne daß das Kind ihnen besondere Aufmerksamkeit widmen würde) und nur noch die Lösung repräsentiert wird (z.B. das Ergebnis des Zählens, die Kardinalzahl). Achtet das Kind vorwiegend auf das Handlungsergebnis, gelingt es ihm auch, verschiedene Zählergebnisse zu vergleichen oder das Zählen für arithmetische Operationen einzusetzen. Darüber hinaus wird die Zählhandlung selbst zählbar (Fuson & Richards, 1979, S. 36-47), d.h. indem das Kind eine Folge von Zahlwörtern den Objekten zuordnet, kann es zugleich die Anzahl der genannten Werte behalten (durch Gruppieren der Objekte selbst, durch doppeltes Zählen, durch andere Objekte z.B. das Begleiten der Zählhandlung mit dem Öffnen einzelner Finger, durch rhythmisches Zählen). Die Abzählbarkeit des Zahlvorgangs selbst gewinnt große Bedeutung bei der Addition und Subtraktion, wenn das Kind die Lösung einer Aufgabe durch Weiterzählen zu finden sucht ($4 + 5 =$).

Welche Veränderungen der zunehmenden Geschicklichkeit des Kindes im Umgang mit der Reihe der natürlichen Zahlen zugrundeliegen, ist im Grunde nicht untersucht worden. Es gibt mehrere

Möglichkeiten für die größere Effizienz im Verhalten des Kindes: einmal könnten Teile der Zählhandlung soweit automatisiert sein (durch langes und intensives Üben), daß das Kind anderen Aspekten des Zählprozesses größere Aufmerksamkeit widmen kann; zum anderen könnte eine "Veränderung in der Repräsentation der Zahlwortfolge oder in der Repräsentation der Produktion der Zahlwortfolge" (Fuson & Richards, 1979, S. 46) stattfinden, wobei die repräsentationalen Verschiebungen sowohl aus spezifischen Lernerfahrungen des Kindes mit der Zahlwortreihe als auch aus allgemeinen Entwicklungsprozessen, die eine Verbesserung repräsentationaler Fähigkeiten nach sich ziehen, herrühren (Fuson & Richards, 1979, S. 46). Schließlich erinnern Fuson & Richards auch an die Arbeit von Case, nach der eine Erhöhung der operationalen Effizienz beim Zählen "eine allgemeine Zunahme in der Geschwindigkeit, mit der Schemata aktiviert werden" einschließt (op. cit.) (vgl. Case, 1978, 1980).

Alle diese prozessuellen Veränderungen können natürlich zusammenwirken, da die Automatisierung sensumotorischer und sprachlicher (d.h. repräsentationaler) Vorgänge zugleich eine Veränderung der qualitativen Ebene der Repräsentation erschließen kann (Tomkins, 1971). In sich koordinierte Schemata müßten dem Kind auch leichter im Rahmen einer Lösungsprozedur zugänglich sein (Piaget & Voyat, 1979). Piagets Unterscheidung von prozeduralen und operativen Schemata ist hier von besonderer Eindringlichkeit. Ist der Prozeß des Zählens noch nicht automatisiert, so werden die verschiedenen Aspekte des Zählens vom Kind im Ablauf des Zählvorgangs konstituiert, das Zählschema entfaltet sich im Sinne Piagets mit dem zeitlichen Ablauf der Zählhandlung.

Obwohl Piaget dem Zählen keine operative Bedeutung zumißt, kann man vermuten, daß bei einer völlig automatisierten Anwendung der Zählhandlung zwischen verschiedenen Aspekten des Zählens eine enge Koordination besteht (den inneren Ordnungsbeziehungen zwischen den Zahlen, den verschiedenen Bedeutungen, die einer bestimmten Zahl zugeordnet werden können); daher könnte die innere Koordination der Zählhandlung die Anwendung von Teilprozeduren

regulieren (vgl. Piaget & Voyat, 1975, S. 71-72 zur allgemeineren Diskussion).

2. Formale Arithmetik und Zahl - numerische Urteilsprinzipien

Gelman & Gallistel (1978) versuchen das Verständnis des Vorschulkindes im Umgang mit Zahlen in Beziehung zu setzen zu der formalistischen Beschreibung der Arithmetik. Im Rahmen dieses formalen Ansatzes werden Zahlen wie "abstrakte Entitäten (betrachtet), die in Übereinstimmung mit den Regeln der Arithmetik manipuliert werden können" (Gelman & Gallistel, 1978, S. 181). Damit wird eine Trennung vollzogen zwischen der Weise, wie das Kind Zahlen repräsentiert und seinem Wissen, wie man mit diesen Zahlen umgehen kann. (1) R. Gelman unterscheidet daher zwischen den Prinzipien des numerischen Schlußfolgerns (numerical reasoning), die z.B. dazu dienen, die Größe zweier Mengen zu vergleichen oder die Bedeutung spezifischer Transformationen für die Größe einer Menge abzuschätzen und den Prinzipien, nach denen das Kind "Zahlen aus der Realität abstrahiert" (op. cit., S. 181), das bedeutet insbesondere die Repräsentation einer Menge von Gegenständen durch den Zählvorgang.

Für die formale Arithmetik ist die konkrete Bedeutung etwa der natürlichen Zahlen nicht von Belang; entscheidend ist, ob dieses "System von Objekten" (Knapp, 1952, S. 5) die grundlegenden Gesetze der Arithmetik befolgen. Knapp formuliert beispielsweise formale Gesetze für die Gleichheit und die Ordnungsbeziehungen zwischen Mengen von Zahlen, für die Addition und die anderen Grundrechnungsarten. So gilt für die Addition, daß jedes Paar von Zahlen addiert werden kann, und daß für die Addition beispielsweise das kommutative und assoziative Gesetz gilt (Knapp, 1952; vgl. Gelman & Gallistel, 1978, S. 182/183). (2)

-
- (1) Diese Unterscheidung drückt sich auch in Gelmans früherer Bezeichnung "estimators" und "operators" für verschiedene Verwendungszusammenhänge von Zahlen aus (Gelman, 1972; Gelman & Tucker, 1975)
- (2) Für die Additionsoperation und ihre inverse Operation lassen sich die arithmetischen Gesetze als abelsche Gruppe beschreiben, in der eine Ordnungsrelation definiert ist.

Die Prinzipien numerischen Schlußfolgerns, die für das Vorschulkind beobachtet wurden, werden ausschließlich auf konkrete Repräsentationen der Anzahl einer Menge von Objekten angewandt. Darin besteht ein entscheidender Unterschied zu den formalen Gesetzen der Arithmetik, die auf abstrakte Einheiten (Zahlen) übertragen werden. Drei solche Prinzipien sind bei Vorschulkindern beschrieben worden (vgl. Gelman, 1972 ; Gelman, 1977; Gelman & Tucker, 1975; Bullock & Gelman, 1977; Gelman & Gallistel, 1978, S. 160-178): Relationen, Operationen und Prinzipien der Reversibilität.

Relationen: Das Kind erkennt zwischen 3 und 6 Jahren Ordnungsbeziehungen zwischen konkreten Mengen von Objekten (deren Anzahl durch Zählen bekannt ist). Das Kind ist sich der numerischen Äquivalenz einer bestimmten Menge sicher, auch wenn diese durch besondere räumliche Veränderungen (z.B. Auseinanderbreiten) verändert wird, die aber die Größe der Menge nicht beeinflussen. Das Urteil des Kindes, daß die Menge bei nicht-numerischen Transformationen gleichbleibt, beruht vermutlich auf seinem vorherigen Abzählen der Menge. "Wenn Abzählen identische Repräsentationen für die Anzahl der beiden Mengen ergibt, wird unterstellt, daß die Mengen die Äquivalenzrelation erfüllen" (Gelman & Gallistel, 1978, S. 164). Vorschulkinder wissen auch, daß zwischen Mengen eine Ordnungsbeziehung definiert werden kann (eine Menge wird als größer als die andere erkannt), wenn die Äquivalenzrelation nicht erfüllt ist (Gelman & Gallistel, 1978, S. 164-166). Wiederum erhält das Kind seine konkrete Information über die zu vergleichenden Mengen anhand des Zählens.

Schon bei Zweijährigen haben Bullock & Gelman (1977) das Verständnis für diese Ordnungsrelation beobachtet. Die Ergebnisse von Bullock & Gelman (1977) erlauben die Vermutung, daß Vorschulkinder die Äquivalenzrelation auch auf andere Mengen übertragen können, d.h. daß sie versuchen, Mengen wieder gleich zu machen, auch wenn ihre konkreten Repräsentationen (ihre Anzahl) sich verändert haben. Gelman vermutet, daß das Kind die Transitivität der Gleichheitsrelation versteht. Es ist allerdings

schwierig, die Bedeutung dieses Prinzips einzuschätzen, da das Kind stets mit konkreten Mengen von Objekten arbeitet.

Die Anwendung dieser Relationen wurden bei Mengen bis zur Größe von 5 beobachtet (bis zu dieser Größe liegen Untersuchungen mit den Zauberversuchen von Gelman und Mitarbeitern vor, Gelman, 1980).

Die "Zaubereperimente" Gelmans zielen darauf ab, die Fähigkeit von Vorschulkindern zu erfassen, über Zahlen Urteile abzugeben. Dazu wurde eine Aufgabe entwickelt, die auf die Motivation und das Verständnis jüngerer Vorschul Kinder ab etwa 2 1/2 Jahren abgestimmt ist.

Das Experiment besteht aus zwei Phasen (Bullock & Gelman, 1977, Gelman & Gallistel, 1978, S. 84-85). In der ersten Phase ordnet der Versuchsleiter zwei Gruppen von Gegenständen auf einer Unterlage an, z.B. zwei Spielzeugmäuse mit identischen Merkmalen auf eine Platte, drei Spielzeugmäuse auf einer anderen. Das Kind erfährt nun, daß eine Gruppe der "Gewinner" ist, die andere der "Verlierer". Dann werden die beiden Objektanordnungen verdeckt und durchgemischt, bis das Kind nicht mehr weiß, an welcher Stelle die jeweilige Gruppe ist. Das Kind wird dann gebeten zu raten, wo der "Gewinner" jetzt ist, was viele Kinder ganz lustig finden.

Nachdem die Objektgruppen wiederaufgedeckt sind, erhält das Kind unmittelbar Rückmeldung über die Richtigkeit seiner Antwort. So erwirbt es eine Erwartung gegenüber einer der beiden Gruppen von Gegenständen. Man kann hier schon anmerken, daß das Kind diese Erwartung üblicherweise in numerischer Form repräsentiert, d.h. wenn es zu versuchen beginnt, daß die Gruppe mit zwei Spielzeugmäusen der Gewinner ist, achtet es auf die Zahl 'zwei'. Die erste Phase besteht aus mindestens 11 Versuchen, in denen die Unterlagen immer neu durchgemischt werden.

Die zweite Phase des Experiments leitet der Versuchsleiter dadurch ein, daß er heimlich die Anordnung von Objekten verändert, die nach Erwartung des Kindes gewinnt. So können als Änderungen eingeführt werden: eines oder mehrere Objekte wegnehmen oder hinzufügen, Veränderung der Farbe/Identität eines der Gegenstände (z.B. eine Zinnfigur anstelle der Spielzeugmaus), Veränderung der räumlichen Anordnung der Objektgruppen.

Wie in der ersten Phase wird das Kind gefragt, wer der "Gewinner" oder der "Verlierer" ist. Darüberhinaus überprüft man, inwieweit das Kind verstanden hat, was sich in der Gruppe von Gegenständen verändert hat (Was ist passiert? Wieviele Gegenstände sind auf der Unterlage? Wieviele waren es vorher? Können wir das Spiel weiterspielen?).

Durch systematische Variationen des Experiments, läßt sich beobachten, welche Veränderungen das Kind als bedeutsam für die Anzahl der Objekte sieht und welche nicht.

Operationen umfassen die Fähigkeit des Kindes "mögliche Transformationen (einer Menge) in für die Zahl relevante und für die Zahl irrelevante (einzuteilen)" (Gelman & Gallistel, 1978, S. 167). "Indem es erkennt, daß die Anzahl einer gegebenen Anordnung entweder mehr oder weniger, oder äquivalent zur Anzahl der ursprünglichen Anordnung ist, wird das Kind dazu geführt, das Eingreifen einer Transformation zu postulieren" (Gelman & Gallistel, 1978, S. 167). Vorschulkinder lernen eine Vielzahl von Manipulationen mit Objekten (Transformationen), "die auf eine Menge angewandt werden können, ohne die Anzahl der Menge zu ändern" (Gelman & Gallistel, 1978, S. 168). Gelman spricht von einer "Klasse von Identitätsoperationen", die die Kardinalzahl nicht verändern. Dazu gehören z.B. das Einführen neuer Objekte, räumliche Verschiebungen, Farbänderungen. Welche verschiedenartigen Transformationen nach Ansicht des Kindes die Identität der Zahl bewahren, ist nicht intensiver untersucht worden (eine Vielzahl interessanter Beobachtungen bei Gast, 1957).

Unerwartete Zunahmen bzw. Abnahmen in der Anzahl erklärt das Kind durch das Hinzufügen bzw. Wegnehmen eines oder mehrerer Objekte (Gelman & Gallistel, 1978, S. 169-173). Ähnlich wie bei der Bewertung der Relationen, versucht das Kind das Ergebnis der Addition durch Abzählen festzustellen. Dabei unterstellt Gelman, daß das Kind weiß, daß es nur dann eine zweite Menge zur ersten hinzuzählen kann, wenn die beiden Mengen sich wechselseitig ausschließen (Disjunktion) (vgl. Wilkinson, 1976). Welche der beiden Operationen - Addition oder Subtraktion - angewendet worden ist, schließt das Kind aus den Ordnungsbeziehungen zwischen den beteiligten Mengen bzw. der Veränderung der Richtung der Ordnungsbeziehungen. Erneut ist Abzählen die zentrale Strategie des Kindes, um Veränderungen und Unterschiede zu beurteilen.

Lösbarkeit (solvability) Kinder können bei Veränderungen von Mengen durch Addition oder Subtraktion nicht nur die angewandte Operation erschließen, sie wissen auch, wie der beobachtete

Unterschied wieder aufgehoben werden kann. Vorschulkinder haben allerdings erhebliche Schwierigkeiten, wenn sie die Addition bzw. Subtraktion von mehr als einem Objekt / Element wieder rückgängig machen sollen (Gelman & Gallistel, 1978, S. 173-178; Gelman, 1977). Sie versuchen zwar, die Mengenunterschiede abzuzählen, aber es gelingt ihnen seltener, eine rekursive Lösungsmethode zu finden, die es erlaubt, den präzisen Unterschied zwischen Mengen zu definieren, das bedeutet etwa die Anzahl der Schritte, die man weiterzählen muß, um zur größeren Menge zu gelangen (vgl. Fuson, 1981).

Diese verschiedenen Prinzipien erlauben dem Kind also über konkrete Mengen von Gegenständen - von denen es die numerische Repräsentation kennt - Schlußfolgerungen anzustellen. Indem durch die Zaubereperimente nachgewiesen wurde, daß Vorschulkinder "einige Fähigkeiten haben, um über Zahlen zu urteilen", stellt sich offensichtlich die Frage, inwieweit diese Prinzipien zu komplexeren arithmetischen Leistungen und auch dem Verständnis des Zahlbegriffs in Beziehung stehen (vgl. Gelman & Gallistel, 1978, S. 177-178; Gelman, 1980; Ginsburg, 1980). Wichtig ist, daß die numerischen Prinzipien des Vorschulkindes sich auf konkrete, numerisch bekannte Mengen von Gegenständen beziehen, während arithmetische "Gesetze" und logische Prinzipien (z.B. Invarianz) sich auf einen abstrakten Begriff der Zahl beziehen (Gelman & Gallistel, 1978, S. 196).

Die Anwendung der Eins-Zu-Eins-Korrespondenz erlaubt dem Kind im Vorschulalter zwar die numerische Gleichheit abzuschätzen, aber für den Einsatz der numerischen Urteilsprinzipien verwendet das Kind grundsätzlich nur Mengen, deren konkrete numerische Repräsentation es kennt. "Urteile der numerischen Äquivalenz, die auf Eins-Zu-Eins-Korrespondenz beruhen, haben keinen Zugang zu den Rechenroutinen, die die numerischen Urteile des Vorschulkindes ausmachen" (Gelman & Gallistel, 1978, S. 201). Die Autoren nehmen dabei an, daß Piaget die Eins-Zu-Eins-Korrespondenz als "psychologisch primitive Grundlage für ein Urteil über die numerische Gleichheit ansieht" (Gelman & Gallistel, 1978, S. 228).

Gelman geht davon aus, daß die arithmetischen Urteile des Kindes sich von einer "numerischen" zu einer "algebraischen" Stufe entwickeln. "Numerisches Urteilen bezieht sich auf Repräsentationen konkreter Mengen. Algebraisches Urteilen befaßt sich mit Relationen zwischen nicht spezifizierten Mengen" (Gelman & Gallistel, 1978, S. 230-231). Die algebraischen Urteilsprinzipien beziehen sich also nicht mehr auf Beziehungen zwischen Relationen" (op cit., S. 231). Kinder in der Zwischenstufe, dem "semialgebraischen" Stadium, können bereits "über die Wirkungen von Transformationen auf eine einzelne, nicht näher spezifizierte Menge" urteilen, nicht aber die Wirkungen von Transformationen, wenn zwei zu vergleichende Mengen vorliegen. (Gelman & Gallistel, 1978, S. 235). Die Fähigkeit des Kindes, Urteile über Mengen anzustellen, wird also aufgrund verschiedener Prozesse der Abstraktion allmählich auf den allgemeinsten Fall ausgedehnt: dem Urteil über Mengen, deren konkrete numerische Repräsentation das Kind nicht kennt.

3. Quantitative Vergleiche im Vorschulalter

Quantitative Vergleiche kennt das Vorschulkind für verschiedene Dimensionen von Objekten, in erster Linie aber für Vergleiche kontinuierlicher Mengen und abzählbarer Mengen. Für den Vergleich der Anzahl von Objekten in verschiedenen Mengen muß das Kind den Begriff der Kardinalzahl verstehen, der mit der logischen Vorstellung der Kardinalität (d.h. Klassen von (numerisch) äquivalenten Klassen) in Verbindung gebracht werden kann. Typischerweise wird die Äquivalenz zwischen zwei Mengen durch Herstellen der Korrespondenzrelation zwischen jeweils zwei Elementen der Mengen geprüft (vgl. Russac, 1978). Nichtäquivalenz von Mengen von Objekten besteht demnach dann, wenn die Mengen nicht in Eins-Zu-Eins-Korrespondenz gesetzt werden können.

Dabei bestehen verschiedene Möglichkeiten der räumlichen Anordnung für die Eins-zu-Viele Relation zwischen Elementen der Vergleichsmengen. Das Kind paart jedes Element der kleineren Menge mit jedem der größeren und bemerkt die Anzahl der fehlenden

Elemente (z.B. für einen roten Stein fehlt ein blauer) oder aber es paart ein Element der kleineren Menge mit zwei oder mehreren Elementen der größeren (Eins-Zu-Viele-Relation). Diese Eins-Zu-Viele-Zuordnung kann an mehreren Stellen in einer räumlichen Anordnung auftreten; sie ist für das Kind am leichtesten nachzuvollziehen, wenn sie am Rand einer linearen Anordnung beobachtet werden kann, kann aber auch sehr verwirrend sein, wenn benachbarte Elemente eine Eins-Zu-Viele Relation erhalten, so daß das Kind beachten muß, keine Überschneidungen vorzunehmen.

Nichtäquivalente Mengen lassen sich nach dem logischen Prinzip der Transitivität anordnen (und damit implizit der Asymmetrie). Für zwei nichtäquivalente Mengen kann das Kind eine "größer" bzw. "kleiner" Menge erkennen (Asymmetrie). Für drei systematisch angeordnete Mengen gilt das Prinzip der Transitivität (aus $a \in b$ und $b \in c$ kann das Kind die Relation $a \in c$ erschließen) (Russac, 1978, S. 728).

Um die kardinalen Beziehungen zwischen Mengen zu erfassen, lassen sich prinzipiell drei Strategien unterscheiden. Die grundlegendste nach Ansicht von Brainerd (1979) und Klahr & Wallace (1976) ist die sogenannte "wahrgenommene Kardinalität". Für Mengen, die weniger als fünf oder sechs Gegenstände enthalten, verfügt das Kind bereits im Vorschulalter über einen direkten Wahrnehmungsmechanismus, der es ihm erlaubt, die Nichtäquivalenz von Mengen unmittelbar zu erkennen. Kleine Gruppen von Objekten, die günstig räumlich angeordnet sind, lassen sich unmittelbar auffassen und vergleichen. Dieser Vorgang wird von einer Reihe von Autoren durch die Automatisierung des Zählvorgangs erklärt, so daß für diese Ansätze kein eigenständiger kognitiver Mechanismus existiert (Zusammenfassende Darstellung bei Gelman und Gallistel, 1978).

Bei größeren Mengen spielen Wahrnehmungsfaktoren ebenfalls eine wichtige Rolle für die Diskrimination zweier Mengen, sofern das Kind verschiedene räumliche Faktoren miteinbeziehen kann (vgl. Underwood, 1966; Brainerd & Siegel, 1978). Erste Untersuchungen zu diesem Forschungsgebiet stammen von Binet selbst, der bei seiner kleinen Tochter Beobachtungen sammelte (vgl. Binet, 1890, 1969; Freeman, 1911). Es ist nicht auszuschließen, daß auch

die jüngsten Kinder, die Mehler & Bever (1967) und Bever, Mehler & Epstein (1968) untersucht haben (ab 2 1/2 Jahren) die Mengen, die ihnen als zwei einander gegenüberliegende, gleichlange Reihen dargeboten wurden (z.B. drei und vier Spielsteine), nicht nur nach räumlichen Gesichtspunkten beurteilen, sondern auch unmittelbar in ihrer Größe abschätzen (zumindest eine der Mengen), so daß der Anteil der richtigen Antworten besser als der Zufall ist.

Die häufigste Strategie, die Vorschulkinder anwenden, um diskontinuierliche Mengen zu vergleichen, ist das Zählen. Das letzte Zahlwort in einer abgezählten Menge repräsentiert zugleich ihre Kardinalzahl (Gelman & Gallistel, 1978; Schaeffer et al., 1974; Russac, 1978). "Diese numerische Repräsentationen werden dann mit ihrer Position in der geordneten Folge von Zahlensymbolen verglichen" (Russac, 1978, S. 728). Diese Vergleichsstrategie schließt demnach mehrere Teilkomponenten ein: zum einen die präzise und koordinierte Anwendung der Prinzipien des Zählens (Gelman, 1978), das Verständnis des Kardinalzahlprinzips (Schaeffer et al., 1974), und die Behandlung der Zahlwörter oder numerischen Repräsentation als geordnete Symbolfolge, an der die Größenrelation zwischen den beteiligten Mengen abgelesen werden kann.

Piaget ordnet dem Zählen eine eher untergeordnete Bedeutung zu: der Zählvorgang wird demnach erst operativ, wenn das Kind die Invarianz der zu vergleichenden Mengen gegenüber räumlichen Transformationen begreift. Daher rührt Piagets seltsame Kennzeichnung des Zählens als "nicht quantitative" Strategie; andere Autoren verwenden die mißverständliche Bezeichnung "halbquantitativ", um Piagets Deutung zu beschreiben.

Beobachtungen an Vorschulkindern zeigen dagegen, daß Kinder schon mit 2 bis 3 Jahren das Zählen dazu einsetzen, kleine Mengen abzuzählen und/oder systematisch zu vergleichen (Gelman, 1972). Diese Vergleichsstrategien werden mit der Verbesserung

der Zählfertigkeiten im Laufe des Vorschulalters zunehmend systematischer für quantitative Vergleiche eingesetzt (Saxe, 1977, 1979).

Bei den jüngsten Kindern beobachtet man was Saxe treffend als präquantitatives Zählen bezeichnet hat. Auf die Aufforderung hin, zwei Mengen zu vergleichen oder zwei gleiche Mengen herzustellen, versuchen vor allem Dreijährige, aber auch manche Vierjährige (Saxe, 1977, S. 1517), eine räumliche Reproduktion der ersten Mengen herzustellen (z.B. das Kind legt auch einen Kreis ähnlich dem vorgelegten). Fordert man Kinder dieses Alters zum Zählen auf, zählen sie u. U. nur eine der beiden Vergleichsmengen und schließen daraus, daß beide Mengen gleichgroß sind. Oder sie zählen beide Mengen gleichzeitig ab, ohne eine Unterscheidung zu treffen und schließen dann aus der Gesamtzahl, daß auch die Teilmengen gleich sein müssen, wenn dies die räumliche Anordnung plausibel macht.

Kinder, deren Verständnis des Mengenvergleichs weiter fortgeschritten ist, zählen auf Aufforderung die beiden Teilmengen getrennt ab, aber die beiden Kardinalzahlen helfen dem Kind nicht zu entscheiden, welche der Mengen größer sein könnte. In spezifischen Aufgabenstellungen verändert das Kind sogar sein Urteil bzw. die Kardinalzahlen, um den räumlichen Anordnungen gerecht zu werden. Etwa zählt das Kind absichtlich zwei gleichlange Reihen so ab, daß jedesmal die gleiche Kardinalzahl zustande kommt (Saxe definiert hier zwei Niveaus lb und lbT, die aber durch die verschiedenen Aufgabenstellungen entstanden sein dürften, vgl. Saxe, 1977, S. 1515). Quantitatives Zählen schließlich bedeutet, daß das Kind das Zählen dazu verwendet, um numerische Vergleiche vorzunehmen, und auch von räumlichen Faktoren nicht irreführt wird, sofern es die Mengen genau gezählt hat (Saxe, 1977, S. 1515 für eine Übersicht der verschiedenen Niveaus).

Die Untersuchungen von Saxe (1977) an 17 dreijährigen, 15 vierjährigen und 10 siebenjährigen Kindern zeigen einen engen Zusammenhang zwischen der Genauigkeit des Kindes beim Zählen und

der angewandten Strategie, Mengen zu vergleichen. Zudem besteht eine Wechselbeziehung zwischen der jeweiligen Zählstrategie des Kindes und spezifischen Aufgabenanforderungen (nämlich Reproduktionsaufgaben, in denen eine gleiche Menge vom Kind aktiv hergestellt werden soll, gegenüber Vergleichsaufgaben, in denen das Kind zwei vorgegebene Mengen vergleichen soll). Auf die detaillierten Ergebnisse von Saxe soll hier nicht näher eingegangen werden, da sie auch von der Größe der Vergleichsmengen abhängen könnten (Saxe verwendet Mengen von 9 bzw. 11 Objekten). Leider berücksichtigt Saxe diesen Gesichtspunkt nicht: das Kind könnte seine Strategie in Abhängigkeit von der Größe der Menge und der Anzahl der Objekte, die es abzählen kann, ändern (vgl. Fuson, 1981). Dreijährige Kinder greifen bei größeren Mengen von Objekten dann auf präquantitative Strategien zurück, wenn sie die vorgegebenen Mengen numerisch nicht präzise repräsentieren können. Die Beschreibung von Strategien bzw. "Niveaus" des quantitativen Zählens bezieht sich deshalb genauso sehr auf die Variationen zwischen Kindern, wie auf die Schwankungen innerhalb verschiedener Aufgabenstellungen und die veränderten Lösungsmethoden des Kindes in Abhängigkeit von der Größe der Vergleichsmengen.

Die Lösungsstrategie des Kindes ist schließlich abhängig von der Präzision der Instruktion: leitet man das Kind gezielt an, jede der beiden Teilmengen zu zählen und fragt man dann nach der größeren Menge, ist eine korrekte Antwort wesentlich wahrscheinlicher als bei der bloßen Aufforderung, die beiden vorgelegten Mengen zu vergleichen. Im letzten Fall sind bei jüngeren Kindern, die beim Zählen die vorgelegten Mengen nur relativ ungenau erfassen können, präquantitative Strategien wahrscheinlicher.

Das beobachtbare Verhalten bei 3- und 4-jährigen Kindern erinnert in gewissem Sinn an Grécos (1962) Begriff der "progressiven Arithmetisierung"; das Kind weitet vor allem in diesem Altersabschnitt seine Kenntnis des Zählvorgangs und der Folge von Zahlwörtern kontinuierlich aus (Gelman, 1978). Verbunden mit dieser Verbesserung der Fertigkeiten sind zugleich systematische Anwendungen des Zählens als quantitative Strategien zur Repräsentation und Differenzierung vorgelegter Mengen. Mit einem Wort, "Zählgenauigkeit" (und das bedeutet vor allem verbesserte

Koordination der Zählfertigkeiten, F.V.) und Zählstrategien entwickeln sich abgestimmt aufeinander" (Saxe, 1977, S. 1519). Hier findet schließlich die Verbesserung der Zählfertigkeiten eine weitere Motivation für das Kind: da Zahlen zunehmend dazu eingesetzt werden können, der alltäglichen Umwelt "numerische Informationen" (Saxe) zu entnehmen, systematisiert das Kind seine Zählfertigkeiten und ordnet sie in seine allgemeinen quantitativen Strategien ein.

In welchem Maße das Zählen systematisch und präzise eingesetzt wird, um Kardinalzahlen zu vergleichen, ist für die Altersgruppe der 5- und 6-jährigen kaum systematisch untersucht worden; umfangreichere Untersuchungen prüfen vor allem den Zusammenhang zwischen den Zählfertigkeiten des Kindes und einer Vielzahl von Reizfaktoren (z.B. Beckman, 1923; Gast, 1957). Allerdings finden sich in der pädagogischen Literatur "Inventare" von Verhaltenskompetenzen bei Vorschulkindern, in denen auch die Fertigkeiten älterer Kinder bei Mengenvergleichen beobachtet wurden (z.B. Long & Welch, 1941; Rea & Reys, 1970, 1971; zur Übersicht vgl. Gelman, 1972 und Cohen & Gross, 1979, S. 129-139). Dennoch liegen kaum systematische Informationen darüber vor, in welchem Maße ältere Kinder ihre Zählfertigkeiten automatisieren und systematisieren (z.B. angezeigt durch schnelleres Zählen oder leises Zählen) und dadurch quantitative Vergleiche noch effektiver und zuverlässiger vornehmen können.

Russacs (1977) Untersuchung mit 20 Kindergartenkindern (mittleres Alter 65 Monate), 20 Kindern der 1. Klasse (76 Monate) und 20 der zweiten (90 Monate) belegt, wie bereits Kinder aus dem Kindergarten Mengenvergleiche systematisch und konsistent vornehmen; nur bei Mengenunterschieden fand sich ein kleiner Anteil von Fehlern (etwa 20 % der Kinder). Da die beiden älteren Gruppen die untersuchten Zählaufgaben schon weitgehend meisterten, wurden für die gesamte Gruppe von Kindern keine systematischen Entwicklungsbeziehungen zwischen der Aufgabe "Äquivalenz durch Zählen" gegenüber "Nichtäquivalenz durch Zählen" (unterschiedlich große Mengen) beobachtet. Wichtig bleibt festzuhalten, daß

es Kindern zwischen 5 und 7 Jahren demnach leicht fällt, auf die numerischen Eigenschaften zu achten, und sie systematisch für den Vergleich kleinerer Mengen von Gegenständen heranzuziehen; dabei fällt den Kindern der Vergleich durch Zählen i.a. leichter als der Vergleich durch Korrespondenz (s. u.). (Russac, 1978, S. 734)

Bei der Diskussion des Vergleichs von Mengen und der Zahlaufassung des Kindes ist es interessant, kurz auf die umfangreiche Arbeit von Gast (1957) einzugehen. Er untersuchte vor allem die Bereitschaft und Fähigkeit des Kindes, sich beim Abzählen von qualitativen Merkmalen zu lösen, um die reine - wie er es nennt - "Zähligkeit" einer Anordnung von Gegenständen zu erkennen. Er sieht die Entwicklung des Kindes als allmähliches "Freimachen ... vom anschaulichen und natürlichen Dingerleben", so daß dem Kind schließlich "alles beliebige in Zahlen faßbar" wird (Gast, 1957, S. 90).

Für die Entwicklung zwischen 3 und 7 Jahren beschreibt er drei Stufen im Zahlverständnis des Kindes. Das "Zählerfassen" bei 3-4 jährigen Kindern sieht er als "anschauungsgebunden" bzw. "anordnungsgebunden" (vgl. Gast, 1957, S. 66 ff.); das Kind ist nur bereit, gleichwertige Gegenstände zusammenzufassen oder zu vergleichen und bleibt mit seinem Zahlendenken dem "Feld" der Objekte "verhaftet". Dagegen schließen 5-6 Jährige einen Kompromiß zwischen quantitativem Wissen und qualitativen Eigenarten der Gegenstände ("anschaulich-gegenständliche Zählerfassung"). Neben der "Zähligkeit" weiß das Kind auch um die Figur- oder "Dingqualität" von Gegenständen und es verwendet sie getreu der Funktion, die das Objekt einnimmt (d.h. das Objekt ist keine "neutrale Einheit"). Das "operative Zahlendenken" bei 6-7-jährigen Kindern endlich bezeichnet die Fähigkeit des Kindes die "Zähligkeit" einer Anordnung relativ frei von figurativen oder qualitativen Eigenarten zu erfassen.

Methodisch bedeutet dies: man kann die Fertigkeiten des Kindes im Umgang mit Zahlen und Mengen besser erfassen, wenn man eine "künstliche Ordnung der Zahldinge durch anschauliche Ähnlichmachung, durch gleichmäßig räumliche Anordnung und durch Vermeidung von funktionellen Betonungen einzelner Dinge" herstellt, denn dann fällt dem Kind die "Zahlbetätigung" viel leichter (Gast, 1957, S. 89). Gast hat unter anderem auch die Frage untersucht, die später Rochel Gelman (1978) wieder aufgriff, welche Gegenstände das Kind bereit ist abzuzählen, aufzureihen und/oder zu einer Menge zusammenzufassen (Gelman spricht vom sogenannten "abstraction principle"). Systematische Ergebnisse zu diesem Problem liegen aber kaum vor.

Für die Bewertung der quantitativen Strategien (Saxe) des Kindes ist auch wichtig, welche Differenzierungen es zwischen Teilmengen erkennt, z.B. wäre es nicht erstaunlich, daß das Kind zwei Teilmengen nacheinander abzählt, ohne die Teilmengen zu unterscheiden, wenn das differenzierende Merkmal z.B. die Farbe, dem Kind nicht deutlich gemacht wird.

Die dritte quantitative Strategie ist die Korrespondenzrelation. Eine Beschreibung und Definition der Eins-Zu-Eins-Korrespondenz wurde bereits früher gegeben. Untersuchungen zur Herstellung der Korrespondenz liegen nur in begrenzter Zahl vor. In der Regel wurde die Bedeutung der Korrespondenz für die Zahleninvarianzaufgabe untersucht, um herauszufinden, welchen Einfluß die Wahrnehmungsunterstützung auf das Urteil des Kindes hat (z.B. Whiteman & Peisach, 1970; Miller, P.H., 1976; Miller, Heldmeyer & Miller, 1975, Miller, P.H., 1978). Unabhängig davon kann aber auch beobachtet werden, ob das Kind die Korrespondenzbeziehungen zwischen verschiedenen Objekten für sein numerisches Urteil einsetzen kann. Mc Dowell (1962) zeigt, daß Kinder relativ früh ein Verständnis für die funktionellen Beziehungen zwischen Objekten haben, z.B. wenn das Kind prüfen soll, ob für jede Tasse ein Strohalm da ist, damit man daraus trinken kann ("provozierte Korrespondenz"). 50 % der 3-jährigen (mittleres Alter 3,4 Jahre), 80 % der 4-jährigen ($\bar{x}$ = 4,6 Jahre) und 96 % der 5-jährigen ($\bar{x}$ = 5,4 Jahre) lösen diese Aufgabe. Ähnlich berichten Rea & Reys (1971) an einer relativ großen Stichprobe von Kindergartenkindern (N = 727; Alter 5,0 bis 5,10), daß 75 % der Kinder die Frage korrekt beantworten, ob für jedes Kind ein Ball da ist (bei 4 abgebildeten Kindern und 5 Bällen). Bei gleich großen Mengen (4 Kinder und 4 Bälle) steigt die Lösungshäufigkeit noch an (88 %). Greeno (1980) beschreibt eine Untersuchung von Hudson, die zeigt, wie Kindergartenkinder die Korrespondenzrelation erfolgreich einsetzen können, um Mengen zu vergleichen (in einem Bild mit 5 Vögeln und 4 Würmern wurden die Kinder gefragt, wie viele Vögel keinen Wurm bekommen). 83 % der Vorschulkinder (d.h. Kinder unter 5 Jahren) und 96 % der Kindergartenkinder (5-6 Jahre)

beantworteten diese Fragen korrekt (Greeno, 1980, S. 4-6). Schließlich berichtet Schwartz (1969), daß Kinder zwischen 5,0 und 6,5 Jahren mit der Korrespondenzbildung relativ geschickt umgehen. Beispielsweise zeichnen 61 % der Kinder eine korrekte Anzahl von Kreisen entsprechend einer vorgelegten Zahl von Strichen; und 80 % der Kinder ziehen korrekte Linien, um die Eins-Zu-Eins Korrespondenz graphisch anzudeuten. Jede dieser Untersuchungen enthält lediglich Lösungshäufigkeiten der Kinder ohne genauere Beobachtungen über die Lösungsstrategie oder die Erklärung des Kindes. Auch wurden keine Vergleiche zu anderen numerischen Aufgaben vorgenommen.

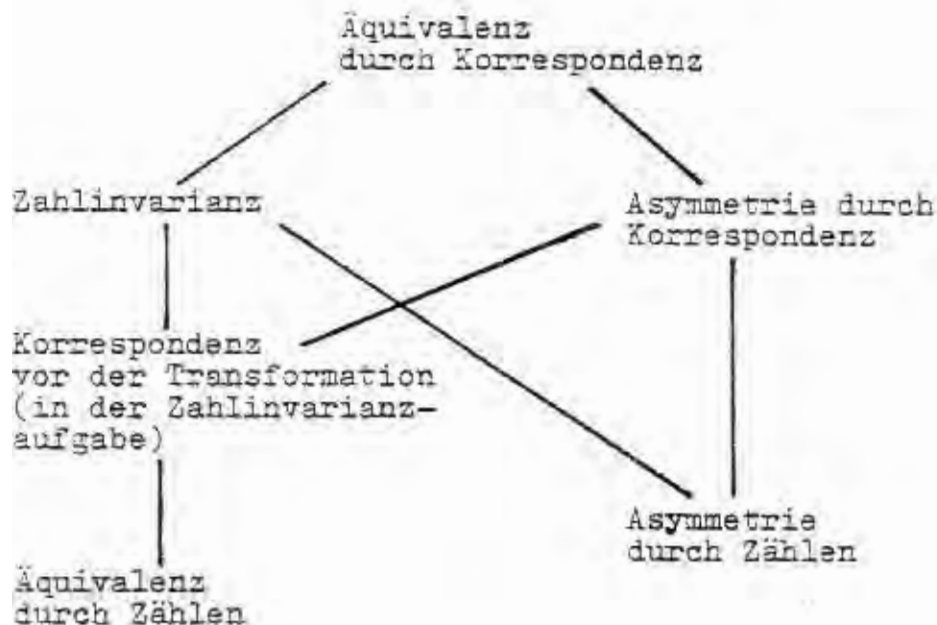
Bei Wang et al. (1971) ist der Vergleich von Mengen durch Eins-Zu-Eins Korrespondenz eingebettet in ein größeres Spektrum von Aufgaben zum elementaren mathematischen Verständnis des Kindes. Die berichteten Häufigkeiten für den korrekten Vergleich von Mengen über die Korrespondenzrelation sind erstaunlich niedrig im Vergleich zu den früher beschriebenen Untersuchungen (20 - 30 % korrekte Antworten bei Wang et al., 1971), obwohl die untersuchten Altersgruppen vergleichbar sind. Vermutlich sind diese Unterschiede auf spezielle Eigenheiten der Instruktionen zurückzuführen; daneben kann die Art der räumlichen Anordnung der zu paarenden Objekte die Lösungshäufigkeit beeinflussen. Der Vollständigkeit halber sollte man noch festhalten, daß Wang et al. (1971) die untersuchten Zählaufgaben und Korrespondenzaufgaben als relativ unabhängige Sequenzen beschreiben, die auch in der Vorschulinstruktion parallel zueinander eingeführt werden sollten (s. u.).

Russac (1978) untersuchte neben den Zählaufgaben auch zwei Korrespondenzaufgaben. In der Aufgabe "Nichtäquivalenz durch Korrespondenz" sollen die Kinder Mengen von 7, 8 und 9 Spielsteinen mittels Korrespondenz vergleichen. Für "Äquivalenz durch Korrespondenz" sollen die Versuchspersonen eine gleich große Menge über die Korrespondenz herstellen und zwar in kollinear Anordnung (d.h. die gepaarten Steine liegen nebeneinander). Die

Äquivalenzaufgabe ist für alle drei untersuchten Altersgruppen schwieriger als die Nichtäquivalenzaufgabe. In der kollinearen Anordnung läßt sich besonders gut beobachten, welche Schwierigkeiten die Kinder diesen Alters haben, eine "nichtperzeptuelle" Zuordnung von Elementen vorzunehmen. Auch erschweren die Elemente am Ende der Anordnung das Mengenurteil des Kindes (überstehende Elemente interpretiert das Kind vermutlich im Sinne einer größeren Länge der jeweiligen Farbreihe).

Der Vollständigkeit halber soll noch kurz eine Analyse der Entwicklungsbeziehungen zwischen Zähl- und Korrespondenzaufgaben sowie der Zahlinvarianzaufgabe dargestellt werden. Dichotome Kodierungen aller beteiligten Aufgaben wurden mittels der Ordnungsanalyse von Krus, Bart und Airisian (1975) auf ihre Entwicklungsbeziehungen geprüft (Vertrauensgrenze $z = 1; 96$, $p < .05$) (siehe Abb. B). Es zeigt sich, daß Zählaufgaben in der Regel leichter sind als Korrespondenzaufgaben. Die Aufgabe "Äquivalenz durch Korrespondenz" stellt offensichtlich die schwierigste Aufgabenstellung dar, weil verschiedene Fehlermöglichkeiten in der Lösungsmethode des Kindes zusammenkommen können.

Abb.B (nach Figur 1, Russac, 1978, S. 733)



Wang et al. (1971) untersuchen die Entwicklungsbeziehungen zwischen elementaren Verhaltensweisen aus der Mathematik, nämlich Zählen, Eins-Zu-Eins Korrespondenz und den Umgang mit Ziffern. Aufgrund einer systematischen Verhaltensanalyse werden drei Hierarchien für die Aufgaben formuliert: eine Sequenz von Zähl-aufgaben (die auch die Verwendung der geschriebenen Zahlen erschließt), eine Sequenz, in der Mengen durch 1 : 1 Korrespondenz verglichen werden, und eine Sequenz, die Mengenvergleiche durch Zählen darstellt. 78 Kinder im Alter zwischen 4,6 bis 6,0 ($\bar{x} = 5,4$) werden für jede Testaufgabe innerhalb der verschiedenen Hierarchien jeweils eine bis fünf Aufgaben vorgelegt. Um die vermuteten hierarchischen Beziehungen nachzuprüfen, wird die multiple Skalogrammanalyse von Lingoes (1963) angewandt, die nicht nur die Skalierbarkeit der verschiedenen Items prüft, sondern zugleich die Suche nach einer optimalen Sequenz für alle Items erlaubt.

Einige Ergebnisse sind dabei von besonderem Interesse: Die Anwendung von Zählzeichen (z.B. die Ziffer "5" einer entsprechenden Menge von Objekten zuordnen) stellt für die Kinder die schwierigste Aufgabe dar; die Kinder diesen Alters erwerben in der Regel das Zuordnen der Ziffer erst nachdem sie systematisch das Zählen und Vergleichen von Mengen gelernt haben (vergleichbare Ergebnisse finden sich bei D'Mello & Willemsen, 1969). Das Abzählen einer "Untermenge" fällt den untersuchten Kindern schwerer als das bloße Abzählen einer ganzen Menge. Dies führen Wang et al. darauf zurück, daß das Kind im ersten Fall die zu zählende Menge im Gedächtnis behalten muß.

Beim Vergleich von Mengen durch Zählen bzw. durch Eins-zu-Eins Korrespondenz berichten die Autoren relativ niedrige Anteile korrekter Reaktionen bei den Kindern (beim Vergleich zweier Mengen durch Korrespondenz zwischen 20 und 30 % korrekter Antworten, beim Mengenvergleich durch Zählen vergleichbarer Zahlen).

(1) Bei der Korrespondenz vergleicht das Kind gleiche Mengen häufiger korrekt als ungleiche, beim Zählen ist diese Beziehung umgekehrt. Zählen und Korrespondenz bilden relativ unabhängige Sequenzen voneinander und sollten nach Ansicht von Wang et al. (1971, S. 1777) auch gleichzeitig in der Instruktion von Vorschulkindern eingeführt werden. Ziffern zur schriftlichen Kennzeichnung der Anzahl werden dann eingeführt, wenn das Kind effizient zählen kann. Ob die beobachteten "natürlichen" Sequenzen auch einer effizienten Gestaltung der Instruktion entsprechen, bleibt damit aber offen.

Eine Replikation der Arbeit von Wang et al. (1971) durch Spradlin, Cotter, Stevens und Friedman (1974) bei geistig behinderten Kindern bestätigt im wesentlichen die Entwicklungsbeziehungen zwischen den verschiedenen Aufgaben von Wang und Mitarbeitern. Der gravierendste Unterschied liegt lediglich

-
- (1) Diese Ergebnisse sind mit Sicherheit durch die Art der Aufgabenstellung geprägt. Russac (1978) erhält bei seiner Kindergartengruppe beim Mengenvergleich durch Zählen über 80 % korrekte Antworten. Leider liegt der genaue Instruktionstext von Wang et al. (1971) nicht vor.

darin, daß geistig behinderte Kinder die Anwendung von Ziffern z.T. vor den Zählaufgaben beherrschten (genau umgekehrt wie bei den Vorschulkindern von Wang et al., 1971; dies ist aber anschaulich dadurch erklärbar, daß in der Instruktion geistig behinderter Kinder größeres Gewicht auf den Umgang mit Ziffern gelegt wird.

Dixon (1977) prüfte bei einer kleinen Gruppe von 24 Vorschulkindern (Alter 3,4 bis 5,4; $\bar{x} = 4,9$) die Rangfolge der verschiedenen mathematischen Fertigkeiten, insbesondere die Zählfertigkeiten des Kindes in ihrer Beziehung zu der Verwendung von Ziffern. Erneut wird belegt, daß die Zähloperation sich vor den Fertigkeiten im Umgang mit Ziffern entwickeln. Die Anwendung von Ziffern zeigt große Variabilität und entsteht relativ unabhängig von den Zählfertigkeiten.

Die Arbeiten von Wang et al. (1971) und Russac (1978) sind einige der wenigen, in denen die beiden wichtigsten quantitativen Vergleichsstrategien von Vorschulkindern, Zählen und Korrespondenz, zueinander in Beziehung gesetzt wurden. Bedenkt man, wie wenig wir über verschiedene Aufgabenfaktoren wissen, die über die erfolgreiche Anwendung dieser Strategie in einer Aufgabe mitentscheiden, so sind auch diese Ergebnisse nur in Relation zu der jeweiligen Instruktion zu sehen. Die Gering-schätzung solcher quantitativer Strategien als Folge der Theorie Piagets hat vermutlich eine intensivere Beschäftigung mit Mengen-vergleichen über Zählen und Korrespondenz behindert.

4. Aufmerksamkeit und Reizpräferenz in kardinalen Aufgaben: Indikatoren

Welche Bedeutung hat die Aufmerksamkeit des Kindes für bestimmte Reizfaktoren bei der Zahlinvarianzaufgabe und anderen Kardina-tionsaufgaben? In den frühen Arbeiten von Zimiles (1963, 1966) wird davon ausgegangen, Kinder könnten die Zahlinvarianzaufgabe nicht lösen, weil sie nicht konsistent auf die Zahl reagieren, sondern auf andere Reize achten. Diese Interpretation geht natür-lich auf Piaget zurück, der in seinen ersten Beschreibungen der Entwicklung der Zahlerhaltung besonderes Gewicht auf das Phänomen der Zentrierung legt: im frühen Vorschulalter "zentriert" sich

das Kind auf bestimmte räumliche Aspekte in der Aufgabe - zunächst Länge, später Dichte - (vgl. Piaget, 1968), besonders dann, wenn die Transformation der Objekte diese Reize verändert. Im zweiten Stadium beginnt das Kind Länge und Dichte gemeinsam zu berücksichtigen, ohne aber bei zu deutlichen Veränderungen durch die Transformation noch sicher genug zu sein, um die Aufgabe korrekt zu lösen. Die Erhaltung der Zahl erwirbt das Kind, wenn es die kompensatorische Beziehung zwischen Länge und Dichte begreift (vgl. Piaget, 1968; Piaget und Szeminska, 1975).

Topologische Aspekte beachten Vorschulkinder insoweit, als sie sich auf den räumlichen Eindruck eines Häufchens verlassen (d.h. die Dichte miteinbeziehen, vgl. Ginsburg, 1975, "heapers") oder die Länge im Sinne eines ordinalen Vergleichs zwischen Mengen betrachten (vgl. "lengthers", Ginsburg). In einer kleinen, aber umso interessanteren Studie zeigt Ginsburg (1975), wie die erste topologische "Strategie" vor allem von jüngeren Kindern beachtet wird ("crowding", "heaping"), während Kinder ab 4 1/2 Jahren in erster Linie die Länge für ihr Urteil verwenden.

Zimiles Arbeiten, die verschiedene Reizdimensionen der Zahlenvarianzaufgabe zu variieren suchten, als auch die erste Trainingsstudie von Gelman (1969) veranschaulichen Gelmans Sicht, man müsse die Fähigkeit von Kindern über Zahlen nachzudenken, in "multidimensionaler Weise" sehen (Gelman, 1972, S. 132). Wird im Laufe der Vorschulentwicklung die Zahl zunehmend von anderen Reizaspekten (Länge, Dichte, topologische Aspekte) differenziert, so wird die "Zahl" in der Hierarchie verschiedener Reize einen ersten Rang einnehmen, vor allem bei kardinalen Vergleichen (vgl. Gelman, 1972, S. 132-133).

Um die Präferenz des Kindes für eine bestimmte Reizdimension zu beurteilen, bietet man dem Kind eine Anordnung von drei Reizen an, bei denen bestimmte Reizdimensionen systematisch verändert sind (bei Zahlstudien in erster Linie Länge, Dichte und Anzahl). Das Kind kann dann auch seine Präferenz für einen bestimmten Reiz nennen; man kann es aber auch bitten, jeweils die beiden

Reize zu kennzeichnen, die sich ähnlich sind (um so die Reizdimension zu erkennen, die das Kind bevorzugt, wenn jeweils zwei unabhängige Reizdimensionen auswählbar sind); schließlich kann man wie Gelman (1972, S. 133-140) das Kind explizit bitten, die Mengen zu benennen, die die gleiche "Zahl" haben.

Gelmans Arbeiten (1972) finden im wesentlichen, daß Kinder bei kleinen Anordnungen (3-5 Elemente) vorwiegend auf die Zahl achten; bei größeren Mengen achten Kinder in erster Linie auf die Länge der Reihe. Dichte hingegen wird als Aspekt zum Vergleich von Mengen kaum hinzugezogen (obwohl dies vielleicht für noch jüngere Kinder, unter 4 Jahren, gelten könnte). Gelmans Untersuchung schloß 4-, 5-, 6- und 7-jährige Kinder ein.

Henry (1976) untersuchte die Aufmerksamkeitspräferenzen für relevante und irrelevante Reizdimensionen von 55 Kindern, die die Zählerhaltungsaufgabe ohne Schwierigkeiten lösten und 25 Kindern, die als "Nichterhalter" eingestuft waren. Die Reizpräferenz wird mit der Methode der Triaden erfaßt, bei der das Kind aus 3 Reizanordnungen, die sich nach Länge, Dichte und Zahl unterscheiden, jeweils zwei gleiche Reize auswählen sollen (Im Unterschied zu der Prozedur bei Gelman werden Positionsreize ausgeschaltet und relativ große Mengen mit 7 bzw. 14 Spielsteinen verwendet).

Die Ergebnisse sind in zweierlei Hinsicht interessant: einmal bevorzugen Kinder, die die Zahlinvarianz beherrschen, wesentlich häufiger die Zahl zum Vergleich von Reizen als "nichterhaltende" Kinder. Die Aufmerksamkeitspräferenz ist demnach ein unterstützender Faktor für die Zahlinvarianzleistung (Henry, 1976, S. 756). Zum andern beachten die 34 untersuchten Kindergartenkinder, die die Zahlinvarianzaufgabe lösen, zunächst relativ häufig die Länge in der Präferenz Aufgabe (immerhin 53 % bevorzugen diese Dimension, und nur 21 % die Zahl), werden diese Kinder allerdings nach der Dimension gefragt, die den ähnlichen Reizen zugrundeliegt, ziehen sie wieder häufiger die Zahl hinzu. Dagegen zeigen "nichterhaltende" Kindergartenkinder eine deutliche Präferenz für die Länge (80 % der Kinder in der Präferenz Aufgabe).

In einer Reihe von Experimenten wurden die Einflüsse dreier Reizfaktoren, der Länge, der Dichte und der Anzahl der beteiligten Elemente auf das Urteil des Kindes über die Kardinalzahl systematisch untersucht (Brainerd, 1973 b; Brainerd & Fraser, 1975; Brainerd, 1977 ; Gelman, 1972; Lawson, Baron & Siegel, 1974; La Pointe & O'Donnell, 1977; Smither, Smiley & Rees, 1974; u.a.). Beispielhaft sollen einige Untersuchungen diskutiert werden.

Lawson, Baron & Siegel (1974) untersucht die relative Bedeutung von Längen-, Zahl- und Dichtereizen bei quantitativen Urteilen von Kindern zwischen 2,10 und 5 Jahren. Den Kindern werden inkongruente Reizvorlagen gezeigt, in denen Länge und Zahl in Konflikt miteinander standen, sowie kongruente Reizmuster, bei denen diese Dimensionen korreliert sind (Die kongruenten Reize dienen dazu, festzustellen, inwieweit die Kinder die grundlegenden Vergleichsoperationen zwischen den jeweiligen Dimensionen verstanden (vgl. Fig. 1 für die Reizvorlagen)).

CONFIGURATION		CUES	
		SAME	DIFFERENT
1 CONGRUENT		LENGTH DENSITY NUMBER	
2 CONGRUENT		DENSITY	LENGTH NUMBER
3 INCONGRUENT			LENGTH DENSITY NUMBER
4 INCONGRUENT		LENGTH	DENSITY NUMBER
5 INCONGRUENT		NUMBER	LENGTH DENSITY

FIG. 1.—Examples of the stimuli used in the number-length assimilation test

Figur 2. Reizvorlagen von Lawson, Baron und Siegel (Child Development, 1974, S. 732)

Zusätzlich wird eine Zahlinvarianzaufgabe durchgeführt, um zu untersuchen, ob die Vergleichsstrategien der Kinder mit den "statischen Anordnungen" (Fig. 2) in Beziehung stehen mit den Leistungen des Kindes in einer "transformierten Anordnung" (vgl. Lawson et al., 1974, S. 732).

Die Ergebnisse dieser Untersuchung zeigen u.a., daß die Anzahl

der Elemente in der statischen Anordnung" durchaus ein wichtiger Reiz auch schon für jüngere Kinder ist, insbesondere wenn - wie Gelman (1972) bereits feststellte - das Kind bei einer entsprechend kleinen Menge in der Lage ist, die Anzahl der Elemente abzuschätzen. Lawson et al. formulieren dies als Regeln, die die Kinder anwenden, ehe sie ein richtiges Verständnis der Konzepte von Länge und Zahl entwickeln: "Wenn die Zahl über dem Bereich liegt, wo man sie abschätzen kann, nimm Länge als Mengenangabe; (1) liegt die Zahl innerhalb des Schätzbereichs, nimm die Anzahl als Mengenangabe" (Lawson et al., 1974, S. 734).

Weder bei Längen- noch Zahlkonzept differenziert das Kind demnach nach eindeutigen Regeln, wann seine Anwendung angemessen oder unangemessen ist. Für Lawson et al. hat das Kind ein übergeordnetes Konzept der "Größe" (bigness), an das sowohl Länge als auch Zahl assimiliert werden können, bzw. für dessen Bewertung diejenige Dimension jeweils berücksichtigt wird, die für das Kind sowohl hervorstechend ist ("salient cue") als auch kognitiv bewältigt wird. Kinder in der Untersuchungsgruppe, die die Zahlerhaltungsaufgabe lösten, konzentrierten sich in ihrer Mengenabschätzung meist auf die Reizdimension der Zahl ("length - to number - assimilation"), d.h. sie präferierten signifikant häufiger die Reizfaktoren der Zahl gegenüber der Länge. Zugleich zeigen diese Ergebnisse, wie auch andere Untersuchungen (z.B. Winer, 1974), daß Kinder bereits unter fünf Jahren Zahlinvarianzaufgaben mit sehr kleinen Mengen lösen können (2 Reihen mit jeweils 4 Geldstücken als Reize). Die Voraussetzung für die Lösung dieser Version der Zahlinvarianzaufgabe sehen Lawson et al. (1974, S. 735) dann gegeben, wenn das Kind, die beteiligten Mengen richtig abschätzen kann und gleichzeitig

-
- (1) Diese Regel spiegelt sich z.B. in den Ergebnissen von Pufall & Shaw (1972) wieder, die Mengen zwischen 5 und 9 Elementen verwendeten und die fanden, daß Kinder zwischen 3 und 5 Jahren die Länge als weitaus wichtigsten Hinweisreiz deuten, um die Quantität der Anordnung abzuschätzen.

stets die Zahl gegenüber den Längenreizen bevorzugt.

In der Arbeit von La Pointe & O'Donnell (1974) wird ebenfalls versucht, die relative Bedeutung von Wahrnehmungsreizen für quantitative Urteile von Vorschulkindern aufzuklären.

Kindern im Alter von 2 bis 5 Jahren werden Reizmuster vorgelegt, in denen Länge, Dichte und/oder Anzahl der Elemente variiert werden (Zahlenunterschiede maximal 1, vgl. Figur 3).

Die Daten bei Kindern mit konsistenten (1) Reaktionen sprechen dafür, daß bei Veränderung von nur einer Reizdimension (Länge, Dichte oder Zahl) die Leistungen der Kinder schlechter sind. Kinder im Alter von 2 bis 5 Jahren scheinen keine konsistente Hypothese anzuwenden, um die Zahlenunterschiede zweier Mengen abzuschätzen. "... es scheint, daß das Kind auf Unterschiede zwischen den beiden Reihen achtet und auf der Grundlage des am meisten hervorstechendsten Reizes reagiert, sei es nun Länge, Dichte oder Zahl" (La Pointe & O'Donnell, 1974, S. 426).

Es ist sicherlich nicht von der Hand zu weisen, daß diese Ergebnisse - das Kind versteht die Zahl im Sinne wahrgenommener Korrespondenzen und Unterschiede in der Anordnung - durch die Eigenart der Reizanordnung (vgl. Fig. 3) provoziert wird.

-
- (1) Zusätzlich wird das sprachliche Verständnis der Kinder für die logischen Beziehungen zwischen "gleich viel" und "mehr" (some vs. more) geprüft, indem die Konsistenz des Urteils bei verschiedenen Fragestellungen untersucht wurde. Erst im Alter von 4 Jahren antworten die Kinder konsistent, d. h. angemessen im Sinne der logischen Beziehungen von 'more' und 'some'. Dagegen antworten z.B. 70 % der 3-jährigen auf die Fragen, ob die eine Antwort gleichviel oder aber mehr sei, beidesmal mit "ja".

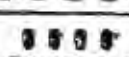
RELATION VARIABLE	STIMULUS SETS	
Density		
Length		
Number		
Density Length		
Density Number		
Length Number		
Density Length Number		

Figure 1. Stimulus sets presented in the verbal concept task. (Pairs of cards had rows varying in length, density, number, or some combination of these dimensions.)

Figur 3 : Reizvorlagen aus LaPointe und O'Donnell, *Developmental Psychology*, 1974, S. 423

Dennoch tritt von den drei Reizdimensionen die Länge der Reihe am stärksten hervor (d.h. sie kann mit dem richtigen Urteil am häufigsten interferieren). Im Gegensatz zu früheren Studien (u.a. Piaget, 1968) zeigt sich aber kein "zunehmend störender Effekt der 'relativen Länge'" (La Pointe & O'Donnell, 1974, S. 427), vielmehr weisen die Ergebnisse darauf hin, daß das Kind mit zunehmendem Alter kontinuierliche Verbesserungen in seinen numerischen Urteilen zeigt und sich so also allmählich unabhängig von Wahrnehmungsdiskrepanzen macht. (1)

Die Leistungen der Kinder sind außerdem am besten bei Zahlenanordnungen mit unterschiedlicher Menge ("inequality items"). Kovariiert die Anzahl mit den Reizdimensionen der Länge bzw. der Dichte, so scheinen diese Dimensionen die Wahrnehmung des (relevanten) Zahlunterschieds zu unterstützen (La Pointe & O'Donnell, 1974, S. 427). Dazu paßt, daß Kinder, die in der

(1) Wie die Autoren anmerken (S. 427) haben eine Reihe anderer Untersuchungen Länge und Dichte als konkurrierende Reize variiert, während sie hier in der Reizanordnung kovariieren. Insofern müssen die Resultate an dieser Besonderheit gemessen werden.

zusätzlich durchgeführten Wahlinvarianzaufgabe erfolgreich waren, versuchten, die relative Anzahl der beteiligten Mengen abzuschätzen, d. h. zu zählen (op cit.).

Smither, Smiley & Rees (1974) gehen davon aus, daß die verschiedenen Aspekte der Reizanordnung bei (statischen) Kardinationsaufgaben nicht völlig unabhängig voneinander sind; ihre relative Bedeutung kann nur durch systematische Variation der unterschiedlichen Reizaspekte aufgeklärt werden. Variiert werden daher die Größe der Anzahl beteiligter Elemente (N), der numerische Größenunterschied zwischen den drei Stimulusreihen ($N\Delta$), Längenunterschiede ($L\Delta$) und Unterschiede in der Dichte ($D\Delta$) zwischen den Reihen. 16 Reizanordnungen, in denen systematisch diese verschiedenen Reizdimensionen miteinander kombiniert wurden, legten sie Kindern im Alter von 3, 4 1/2 und 6 Jahren vor.

Die Ergebnisse widersprechen der Annahme von "Stadien" oder Phasen in der Entwicklung (richtiger) Zahlurteile im Vorschulalter (1), vielmehr kann man nach Ansicht der Autoren davon ausgehen, daß sich das numerische Urteil von Kindern "in einer kontinuierlichen, geordneten Weise (entwickelt) und daß die Verwendung von Längen- und Dichtereizen (beim Vergleich unterschiedlicher Reizanordnungen) nicht nur vom Alter und dem Grad des Hervortretens dieser Dimensionen abhängt, sondern auch von der

(1) Mehler und Bever (1967) behaupten, jüngere Kinder gäben zunächst angemessene Zahlurteile ab; werden sie etwas älter, so führen sie aber konfligierende Wahrnehmungsreize - besonders die Länge - in die Irre. Piaget (1968) argumentiert dagegen in seiner Kritik an der Arbeit von Mehler & Bever, Kinder würden zu unterschiedlichen Zeitpunkten der Entwicklung durch verschiedene Wahrnehmungsdimensionen in ihre numerischen Urteil geleitet (zunächst relative Dichte, später Länge der Reihe). Beide Arbeiten unterscheiden aber explizit "Phasen", in der bestimmte Wahrnehmungsdimensionen dominieren.

Größe der Zahl (der Elemente) und der Zahlunterschiede (zwischen Reihen)" (Smither et al., 1974, S. 698). Zahlunterschieden zwischen den jeweiligen Mengen weisen sie eine außerordentlich wichtige Rolle zu. "Selbst wenn Dichteunterschiede groß und Längenunterschiede gering sind, beeinflussen Veränderungen in den Zahlenunterschieden die Leistung von 3- und 4 1/2-jährigen sowohl für große als auch kleine Zahlen" (Smither et al., 1974, S. 698). Für kleine Längenunterschiede und bei relativ kleinen Vergleichsmengen geben alle Altersgruppen richtige Zahlurteile ab, sofern die Dichteunterschiede bzw. die Zahlunterschiede zwischen den Vergleichsmengen groß waren. "Waren die Zahlen groß und die Zahlunterschiede gering, so urteilten alle Altersgruppen aufgrund der Länge" (Smither et al., 1974, S. 698).

Was läßt sich nun aus diesen Ergebnissen (auch im Vergleich mit den früher diskutierten Untersuchungen) ablesen:

Erstens, scheint außer Zweifel, daß bei systematischer Variation aller beteiligten Dimensionen (Länge, Dichte, Dichte- und Längenunterschiede, Anzahl, Zahlunterschiede) das einheitliche Bild, das z.B. Piaget (1968) entworfen hat (daß nämlich Kinder unterschiedlichen Alters bestimmte Reizdimensionen durchgehend präferieren, wenn sie ihr numerisches Urteil abgeben), fragwürdig ist. Besonders interessant ist, wie flexibel die Kinder auf die (Ko)-Variationen der vorliegenden Reizdimensionen reagieren und so die verschiedenen Reizaspekte zu berücksichtigen suchen. D.h. die "Evidenz für die Verwendung unterschiedlicher Wahrnehmungsreize in unterschiedlichen Altersgruppen ist schwach" (Smither et al., 1974, S. 679). (1)

-
- (1) Wie nehmen Kinder Beziehungen zwischen Reizdimensionen bzw. zwischen Reizen, die nach mehr als einer Reizdimension variieren, wahr? In einer originellen Entwicklungshypothese gehen z.B. Smith & Kemler (1977) davon aus, daß die Wahrnehmung jüngerer Kinder um eine Struktur der Ähnlichkeit zwischen Reizvorlagen (similarity structure), nicht aber um eine dimensionale Struktur organisiert wird. .h. Vorschulkinder

Fortsetzung folgende Seite

Zweitens, zeigt sich erneut, daß auch jüngere Vorschulkinder auf Zahlunterschiede durchaus reagieren ("sensitivity to number differences", Smither et al.), selbst wenn ihre numerischen Urteile noch nicht genau sind.

Drittens, schließlich ist die Art der Reizanordnung nicht ohne Bedeutung für die Reizdimensionen, die Kinder in ihrem Urteil berücksichtigen. In den Vorlagen von Smither et al. mußten die Kinder aus drei untereinander angeordneten Reizmustern ('Murmeln') die Reihe, mit den meisten Objekten aussuchen. Da die drei Reihen jeweils schon Variationen der beteiligten Reizdimensionen mit-enthielten, wird das Kind dann auch eher auf Wechselbeziehungen zwischen Reizfaktoren aufmerksam werden!

Brainerds Untersuchung zur relativen Bedeutung von Länge, Dichte und numerischen Reizen bei statischen Kardinationsaufgaben (1977) variiert Dichte- und Längenunterschiede unabhängig voneinander, um zu zeigen, auf welchen Reizaspekt das Kind sein Mengenurteil gründet. Vorschulkinder (Alter 4,8) und Erstklässler

Fortsetzung der vorigen Seite

nehmen z.B. zwei Reize als ähnlich wahr, weil sie sich auf zwei Dimensionen (gleichzeitig berücksichtigt!) nur wenig unterscheiden. Ältere Kinder klassifizieren dagegen Reize nach einer Dimension, auch wenn die Ausprägungen der Reize auf dieser Dimension nicht so nahe zusammenliegen (vgl. auch: Shepp, 1978). Empirische Untersuchungen zu dieser Hypothese liegen bisher zu eher anschaulichen Reizdimensionen vor (z.B. Größen-, Felligkeitsunterschiede).

Überträgt man diese Hypothese auf das Problem kardinaler Vergleichsurteile, so könnte Piagets Deutung der quantitativen Urteile des Kindes - wonach Kinder ihre Wahrnehmung auf eine Reizdimension zentrieren - (vgl. Piaget, 1968) durch einen wichtigen Gesichtspunkt erweitert werden. Vergleichen Vorschulkinder wahrgenommene Reizmuster nach ihrer relativen Ähnlichkeit, so kommt Kovariationen zwischen den verschiedenen Reizfaktoren (Länge, Dichte, etc.) einige Bedeutung zu, besonders dann, wenn keiner der Reizdimensionen (z.B. die Länge) sich ausdrücklich von den anderen abhebt ("salience"). Zentrierungseffekte entstünden demnach auf dem Hintergrund einer günstigen 'Reizfaktoren-Kovariation', die der Dimension besonderes Gewicht zubilligt.

(Alter 6,6) werden 16 Reizanordnungen gemäß der Kardinationsaufgabe von Brainerd vorgelegt.

Die Analyse der Altersgruppen zeigt u.a., daß Veränderungen (1) im 5. Lebensjahr sich "auf Reize gleicher Länge - unterschiedlicher Dichte und Reize unterschiedlicher Länge - unterschiedlicher Dichte (beschränkten), in denen der Längenunterschied größer ist als der Dichteunterschied" (Brainerd, 1977, S. 428). Entwicklungsveränderungen bei 6-jährigen findet sich dagegen bei "Reizen unterschiedlicher Dichte - unterschiedlicher Länge, in denen Längen- und Dichteunterschied gleich sind" (op cit.). Betont man solche alterstypischen Veränderungen, so wird es fragwürdig, ob die "Entwicklung der Kardinalzahl ... in einer stetigen und kontinuierlichen Verbesserung auf allen möglichen Länge-, Dichte- und Zahlen-Konfigurationen besteht" (Brainerd, 1977, S. 428).

Mittels Skalierungsanalysen untersucht Brainerd zudem die Schwierigkeitsreihenfolge der Aufgaben in den beiden Altersgruppen. Die vier definierten Schwierigkeitsniveaus in den beiden Gruppen zeigen gewisse (zu erwartende) Ähnlichkeiten (eine Reihe von Aufgabentypen, die im gleichen Schwierigkeitsniveau zu finden waren), sowie leichte Verschiebungen zwischen Altersgruppen (Aufgaben, die in der Altersgruppe 4 im Schwierigkeitsniveau III lagen, lassen sich in der Altersgruppe 6 im Niveau II einordnen). Diese vergleichende Analyse erlaubt jedoch nur recht grobe Hinweise.

Weitere wichtige Ergebnisse fügen sich in das Bild früherer Untersuchungen. - So beobachtet man auch hier, wie die Anzahl der Reizelemente erheblichen Einfluß auf das Urteil des Kindes hat, auch wenn Längen- und Dichteunterschiede gleich sind (vgl. "small number effect", Gelman). Auch zeigt sich, daß Kinder sich eher auf Längenunterschiede als auf Dichteunterschiede verlassen, wenn die Dichte- und Längendimensionen miteinander konkurrieren (Brainerd, 1977, S. 429). Weitere Detailergebnisse bei Brainerd können hier unberücksichtigt bleiben; Resultate mit einer Reihe von Reizanordnungen, die er verwendet hat, stützen jedoch die Schlußfolgerung von Smither, Smiley & Rees (1974); nämlich: kleine Stimulusveränderungen (in einer der drei genannten Dimensionen) haben oft erheblichen Einfluß auf das Urteil des

(1) geprüft durch biseriale Korrelationen zwischen Lebensalter in Monaten und Aufgabentypen.

Kindes. (1).

Brainerd sieht diese Ergebnisse als deutlichen Kritikpunkt am Stadienansatz und an der Behauptung Piagets, daß Kinder in unterschiedlichen Stadien der kognitiven Entwicklung im Vorschulalter (richtiger: Phasen) sich nur auf einen besonderen räumlichen Reiz beschränken und darauf ihr numerisches Urteil aufbauen.

"Im Gegensatz zu dem Stadienansatz, zeigen die vorliegenden Ergebnisse, daß große Unterschiede in der Genauigkeit der Reaktion von Kindern erzeugt werden können, durch solche kleinen Unterschiede wie die Verwendung von sechs anstelle von fünf Farbpunkten oder eine numerische Differenz von drei anstelle von zwei. Es scheint sehr schwierig, die Stadienperspektive mit den großen Verhaltensänderungen zu vereinbaren, die durch solche geringfügigen Stimulusmanipulationen herbeigeführt werden" (Brainerd, 1977, S. 430).

Welche Schlußfolgerungen erlauben diese unterschiedlichen Untersuchungsansätze?

Eine Reihe von Hinweisen leiten sich aus den Untersuchungen ab:

Um die Logik des Vergleichs zwischen Mengen zu verstehen, muß das Kind sprachlich die Unterscheidung zwischen 'gleichviel' und 'mehr' verstehen (La Pointe & O'Donnell, 1974, S. 428).

Bei Mengen, die das Kind numerisch repräsentieren kann (entweder weil die Mengen sehr klein sind oder das Kind gezählt hat), gründet das Kind sein Urteil auf die numerische Korrespondenz. Bei größeren Mengen, die das Kind nicht repräsentieren kann, orientiert es sich an Länge und/oder Dichte der Reihe (Gelman, 1972). Zählen und andere Hinweise, die das Kind mit seiner

(1) Bei den Durchgängen (jeweils drei) mit den 16 unterschiedlichen Reizanordnungen zeigt sich eine relativ hohe Konsistenz im Urteil der Kinder. Nur zehn 4-jährige und acht 6-jährige Kinder (von jeweils einhundert) gaben inkonsistente Urteile bei einem oder mehreren Reizen ab (Brainerd, 1977 c, S. 429).

Aufmerksamkeit auf die numerische Korrespondenz zwischen den Mengen lenkt, fördern die Korrektheit des Zahlurteils des Kindes (Gelman u. Gallistel, 1978; La Pointe & O'Donnell, 1974, S. 428).

Werden die unterschiedlichen Reizdimensionen der Kardinationsaufgabe systematisch miteinander variiert, so ergeben sich komplexe Ergebnisse, die den üblichen Stadientheorien widersprechen (Brainerd, 1977 ; Smither, Smiley & Rees, 1974). Welche Bedeutung diesen komplexen Ergebnissen bei Kovariationen unterschiedlicher Reizdimensionen für Piagets Stadientheorie haben, ist nicht so eindeutig auszumachen, wie Brainerd (1977, S. 430) behauptet. Die Frage der Kontinuität - Diskontinuität von Stadien im Sinne Piagets ist nicht zugunsten eines Aspekts zu entscheiden. Allerdings zeigen die Ergebnisse, daß Piagets Konzept der "Zentrierung" weiter differenziert werden muß.

Patricia H. Miller hat durch eine Reihe von systematischen Untersuchungen die Bedeutung von Reizdimensionen für verschiedene Aufgaben im Bereich der konkreten Operationen herausgearbeitet. In ihrer Übersicht über verschiedene Reizfaktoren bei der Zahlinvarianzaufgabe (P.H. Miller, 1978) versucht sie, den Einfluß spezifischer Reizdimensionen (z.B. Grad an Wahrnehmungsunterstützung; Art der Transformation; räumliche Reize) im Laufe der Entwicklung kognitiver Aufgaben durch ein Informationsverarbeitungsmodell zu deuten. Eine präzise Fassung dieses Modells findet sich in der Arbeit von 1979 (P.H. Miller, 1979).

Piagets ursprüngliches Modell der Invarianz (das er z.T. später ausgeweitet bzw. revidiert hat) ging, wie schon früher erwähnt, für Aufgaben wie der Mengeninvarianz oder der Zahlinvarianz von verschiedenen Stufen in der Konzeptentwicklung aus: zunächst konzentrierte sich das Kind nur auf eine Reizdimension (insbesondere die Länge); erkennt es die Bedeutung einer weiteren Dimension (Breite/Dichte), sucht es sein Urteil darauf zu gründen; in einem dritten Schritt der Entwicklung zieht das Kind beide Dimensionen in Betracht, schwankt aber u.U. noch in seinem Urteil, bevor es im vierten und letzten Schritt die kompensatorische Beziehung zwischen den beiden Dimensionen begreift und somit das Invarianzkonzept erwirbt (Eine Darstellung dieser Stufen für die Zahlinvarianz findet sich bei Piaget, 1968, vgl. auch Piaget, 1978).

Wenn das Kind tatsächlich bestimmte Reizdimensionen bevorzugt auswählt und sie für die Bewertung einer Aufgabe einsetzt, kann dies nicht lediglich aus der Entwicklung "abstrakter kognitiver Prozesse" (Miller, P.H., 1979, S. 150) erklärt werden (etwa mittels der Kompensation). Eine eigenständige Entwicklung in den Prozessen der Aufmerksamkeit und der Wahrnehmung ist wahrscheinlich, die bei der Informationsaufnahme und -verarbeitung von Bedeutung ist. Mehr noch, Miller schlägt eine "kontinuierliche Interaktion zwischen diesen beiden Niveaus der Verarbeitung vor, wobei Fortschritt auf einem Niveau die Weiterentwicklung in dem andern fördert" (P.H. Miller, 1979, S. 100).

So können Präferenzen für eine bestimmte Reizdimension (z.B. die Länge bei Mengen) die Problemlösungsfähigkeit des Kindes entweder hindern oder unterstützen, je nach dem welche Bedeutung diese Dimension für die Aufgabe hat (vgl. Miller, 1978; Miller, 1979, S. 100 ff.). Obwohl die Invarianzaufgaben "mehr einschließen als nur Aufmerksamkeitsfaktoren" (Miller, P.H., 1979, S. 103), ist es wahrscheinlich, daß das Verständnis des Kindes für verschiedenartige Reizdimensionen seine begriffliche Entwicklung erheblich beeinflussen kann. Indem das Kind das relative Gewicht verschiedener Reizdimensionen für eine bestimmte Gruppe von Aufgaben begreift, lernt es relevante Dimensionen von irrelevanten zu unterscheiden (welche Reizanforderungen sind für die Einschätzung einer numerischen Menge von Bedeutung?), und bei spezifischen Aufgabenstellungen die entscheidende Dimension bevorzugt zu behandeln und sich vom Einfluß nebensächlicher Reizinformationen allmählich zu lösen (vgl. Längendimension bei der Zahlinvarianzaufgabe).

Da die Flexibilität des Kindes im Umgang mit sich wechselseitig beeinflussenden Reizaspekten auch für die Lösung spezifischer Aufgabenstellungen von Bedeutung ist, erkennt man zunehmend in der Piaget-Forschung die Rolle, die Reizfaktoren bei der diagnostischen Erfassung eines Konzepts bei Kindern zukommen muß (Flavell, 1977).

Miller (1978) dokumentiert die größere Zahl von Reizbedingungen, die die Leistung des Kindes z.B. bei der Zahlinvarianzaufgabe beeinflussen können, und zwar insbesondere bei Kindern, die sich im Übergang zwischen Nichterhaltung und Erhaltung befinden. Das heißt, daß die Faktoren der Aufmerksamkeit und der Reizpräferenzen in ein Performanzmodell der kognitiven Entwicklung miteinbezogen werden müssen (Odom, 1978). Obwohl dieser Punkt hier nur kurz angerissen werden kann, soll P.E. Millers Beschreibung wie das Kind zunehmend geschickter im Umgang mit Reizdimensionen wird (Miller, P.E., 1979, S. 109-112) erwähnt werden, weil sie veranschaulicht, wie das Kind seine Aufmerksamkeit zunehmen zielstrebig und erfolgreicher einsetzen kann, um die entscheidende Information bei einer kognitiven Aufgabe auszuwählen. Tatsächlich schließen Invarianzaufgaben eine "notwendige und natürliche Abhängigkeit" zwischen Reizdimensionen ein (vgl. auch Anderson & Cuneo, 1978), und das Kind muß im Grunde lernen, welcher Grad an Zusammenhang zwischen verschiedenen Reizdimensionen innerhalb der Aufgabe bestehen kann (z.B. Länge und Dichte bei der Zahlinvarianz) und für spezifische Aufgabensituationen diese "Korrelation" Gültigkeit hat (vgl. Miller, 1979, S. 113). Über die statischen Anordnungen hinaus, die z.B. bloße Mengen- oder Größenvergleiche einschließen (1), beinhalten Invarianzkonzepte eine Variation ein und desselben Gegenstands, von Anordnungen von Gegenständen bzw. Reizkonstellationen. Räumliche und/oder zeitliche Veränderungen und Beziehungen führen das Kind zu einem grundlegenden Verständnis der Abhängigkeiten zwischen verschiedenartigen Reizdimensionen und abstrakten kognitiven Bezügen ("Invarianz") (vgl. Piaget, 1978), erfordern aber zugleich, daß das Kind ein breites Spektrum an Informationen über die Aufgabe aufnimmt und verarbeitet. P. Miller spricht

(1) Man vergleiche die Aufgaben, in denen das Kind z.B. zwei statisch angeordnete Mengen vergleichen soll, wobei verschiedene irrelevante Reizfaktoren wie Länge, Dichte etc. eingeführt werden können (s. Brainerd, 1977).

hier in besonders treffender Form von der "Dimensionalisierung des sich verändernden Reizes", die z.T. die Grundlage des reifen Konzepts bilden könnte. Bedenkt man was die Dimensionalisierung der Reizinformation bedeutet (P.H. Miller, 1979, S. 109-112): die Erarbeitung unterschiedlicher qualitativer Merkmalsausprägungen auf einer Dimension; das zunehmende Verständnis auch quantitativer Ausprägungen auf dieser Dimension; die Abtrennung bzw. Ausdifferenzierung verschiedener Reizdimensionen voneinander (z.B. "Größe" in "Länge" und "Breite"); die Zunahme in der Zahl der Dimensionen, die das Kind gleichzeitig beachten kann und damit auch die "aktive Suche" nach einer bestimmten Reizdimension; schließlich ein begriffliches Verständnis von Dimensionen und damit das Entstehen einer allgemeinen "Einstellung zu dimensionalisieren", d.h. die Aufgabensituation nach verschiedenen Reizaspekten zu ordnen und zu beurteilen - so versteht man den Weg, den das Kind im Vorschulalter durchläuft bis es schließlich tatsächlich nicht nur die Dimension bei (relativ) statischen Anordnungen berücksichtigen kann, sondern sie noch darüber hinaus in Beziehung setzen kann zu möglichen zeitlichen und/oder räumlichen Änderungen, die durch die Invarianzaufgabe vorgeführt werden.

Die Bedeutung der visuellen Aufmerksamkeit und der Reizpräferenzen von Kindern diesen Alters, läßt sich besonders präzise an den Augenbewegungen verfolgen, die Kinder bei Invarianzaufgaben (nach durchgeführten Transformationen) zeigen. Boersma und seine Mitarbeiter haben hierzu eine Reihe von interessanten Studien vorgelegt (vgl. Boersma und Wilton, 1974, 1976; Wilton und Boersma, 1974; O'Bryan und Boersma, 1971, 1972). In diesen Untersuchungen wird unter anderem gezeigt, daß Kinder, die die Invarianz beherrschen, andere Wahrnehmungsstrategien zeigen als Kinder, die annehmen, die Transformation habe die Mengen verändert. Speziell ist das explorative visuelle Verhalten bei "Erhalten" aktiver (z.B. mehrere aufeinander folgende Augenfixierungen auf bestimmte Reizelemente; größere Zahl von Verschiebungen der Fixierungspunkte) und sie zeigen eine geringere Zahl an Wahrnehmungszentrierungen als "Nichterhalter"

(Zentrierung beobachtet man über Schwerpunkte in der Augenfixierung, z.B. auf den als größer gewählten Reiz) (Wilton und Boersma, 1974).

In einer Trainingsstudie, die sich an die Prozedur von Gelman (1969) anlehnte - Ziel ist es, Kinder auf aufgabenrelevante Reizaspekte aufmerksam zu machen -, zeigen Boersma und Wilton (1974), daß trainierte "nichterhaltende" Kinder infolge des Trainings "Muster visuell explorativen Verhaltens und wahrnehmungsmäßiger Dezentrierung (zeigten)" (Boersma und Wilton, 1976, S. 636), die denen von natürlichen Erhaltern ähneln und sich zugleich von den Wahrnehmungsstrategien abheben, die Kontrollkinder ohne Invarianzbegriff üben. Eine ähnliche Untersuchung mit geistig behinderten Kindern (durchschnittlicher IQ 70), in der auch Gelmans Trainingsmethode Anwendung fand, liefert vergleichbare Ergebnisse. Geistig behinderte Kinder, die Erhaltungstraining erhielten und geistig behinderte Kinder, die den Invarianzbegriff bereits beherrschen, zeigen ähnliche Formen visuell explorierenden Verhaltens und weniger Wahrnehmungszentrierung als untrainierte nichterhaltende Kinder (Boersma und Wilton, 1976).

Eine plausible Erklärung für die geringere Wahrnehmungsaktivität von nichterhaltenden Kindern ist, daß diese Kinder sich auf das Element bzw. auf die Reizdimension konzentrieren, für die sie annehmen, sie müßte nach der Transformation größer sein.

Boersma ist allerdings selbstkritisch genug zu betonen, daß Veränderungen in den Mustern der Augenbewegungen eines Kindes in der Invarianzaufgabe (z.B. Zahlinvarianz) nicht zugleich bedeuten muß, daß eine "kognitive - strukturelle Entwicklung tatsächlich als Folge des Trainings stattgefunden hat" (Boersma und Wilton, 1976, S. 642). Veränderungen im Aufmerksamkeitsverhalten versteht er als "wesentlichen Aspekt kognitiv-struktureller Veränderungen" (op. cit.), aber sie sind lediglich Indikatoren für eine mögliche Änderung und können z.Zt. weder als hinreichende noch als notwendige Bedingungen für den Invarianzbegriff verstanden werden.

Verständnis von Vorschulkindern für "praktische" arithmetische Operationen

Abschließend werden zwei Untersuchungen dargestellt, die verdeutlichen, welchen "praktischen" Zugang Vorschul Kinder zu den

arithmetischen Operationen finden, die ihnen in der Schule vermittelt werden. Damit werden im Grunde die Gedanken von Gelman weitergeführt, nur sollen hier die arithmetischen Operationen als eigenständiger "Wissensbereich" von Vorschulkindern erörtert werden.

A. Dean Hendrickson (1979) beobachtete 57 Kinder (30 Jungen und 27 Mädchen) gleich zu Anfang des ersten Schuljahres mit einer Reihe von Aufgaben zum Zählen und Erkennen von Zahlen bei unterschiedlichen Anordnungen von Gegenständen und zur praktischen Anwendung der arithmetischen Operationen mit Hilfe von Blöcken. Die Erstklässler zeigten erhebliche Variationen in ihren Zählfertigkeiten. Das Abzählen von mehr als 15 Objekten macht nicht wenig Kindern Schwierigkeiten, auch wenn sie die Abfolge der Zählwörter genau aufsagen können. Werden Anordnungen von Objekten in Untergruppen gegliedert (z.B. 5 in Häufchen von 2 und 3 Objekte), so benennen viele Kinder zunächst die Größe der Untergruppen (77 % der Kinder nannten zuerst 2 oder 3) bzw. sie versuchen die Größe der Untergruppen zu vergleichen. Diese Aufgabenstellung führt die Kinder dieses Alters also eher dazu, Teilmengen zu vergleichen (68 % erörtern die gesamte Menge - 5 - erst nach einer zusätzlichen Aufforderung). Interessant ist, daß der größere Teil der Kinder beim Aufteilen einer mehrfach gezählten Menge in Untergruppen (z.B. 12 Objekte in 8 und 4) ohne Zahlen sich der Größe der Gesamtmenge sicher sind (82 %). Sind Kinder dieser Gruppe also überzeugt, richtig gezählt zu haben, bleiben sie bei ihrem numerischen Urteil, auch wenn die Objekte systematisch umgruppiert werden. Die Aufgabe mit verschiedenen arithmetischen Operationen zeigen, daß die Kinder mit Eintritt in die Schule konkretes Aufgabenmaterial verwenden können, um Gegenstände für arithmetische Aufgaben zusammenzustellen: die Kinder "können Gruppen bilden, sie vergleichen, sie vereinigen, trennen, zerlegen, soweit dies für die Lösung aller vier arithmetischen Operationen erforderlich ist" (Hendrickson, 1979, S. 21). Multiplikation und Division wird von einer Reihe von Erstklässlern als wiederholte Addition größerer Einheiten (z.B. in 5er Schritten)

bzw. wiederholte Subtraktion interpretiert, was man sowohl an den Erklärungen ablesen konnte als auch an der Art und Weise, wie sie die vorgegebenen Klötzchen zusammengruppierten (vgl. Hendrickson, 1979, S. 20, 21). Bei einem Teil der Lösungen wird die Lösungsstrategie aber aus der Beobachtung nicht deutlich, zumindest kann sie der Autor nicht veranschaulichen. Obwohl Hendrickson aus den Ergebnissen weiterführende Empfehlungen für die Förderung von Vorschulkindern und Kindern im 1. Schuljahr ableitet, ist an dieser Stelle wichtiger hervorzuheben, welche praktischen Operationen und Manipulationen 6- und 7-jährige vornehmen können, um arithmetische Operationen lösen zu können. Dazu gehört auch das Aufteilen von Gruppen von Objekten in gleichgroße Teilgruppen (was immerhin bei Mithberücksichtigung von Hilfestellungen 70 % der untersuchten Schüler lösen), oder das Multiplizieren von Gruppen mit 2 oder 3 (mit Hilfestellung ebenfalls von 50 bis 70 % bewältigt). Dieses praktische operative Verständnis beeinflußt sicherlich den Zugang des Kindes zu Lernsituationen in der Mathematik des ersten Schuljahres.

Das Verständnis für die praktischen Operationen der Addition und Subtraktion bei Vorschulkindern wird in den beiden Untersuchungen von Brush (1978) verfolgt.

Ausgangspunkt der Aufgaben ist das Herstellen zweier gleich großer Mengen durch Eins-Zu-Eins Korrespondenz: man legt jeweils gleichzeitig ein Objekt jeder Menge in zwei vorgegebene Behälter. Nachdem das Kind die Gleichheit der Mengen bestätigt hat, fügt man einer Menge noch ein zusätzliches Objekt hinzu (einfache Addition); nimmt aus einer Menge ein Objekt weg (einfache Subtraktion); fügt einer Menge zwei, der anderen ein Objekt hinzu (komplexe Addition); oder entnimmt der einen Menge ein Objekt, fügt bei der anderen eins hinzu (Verbindung von Addition und Subtraktion) usw.. Die Ausgangsmengen sind relativ groß (11 bis 14), so daß das Kind weniger auf die Anzahl achten kann, sondern vielmehr auf die durchgeführte praktische Operation.

In der ersten Untersuchung beobachtet Brush (1978) 26 Kinder zwischen 3;11 und 5;11 Jahren bei neun verschiedenen Aufgabenstellungen - wie oben beschrieben; in der zweiten Untersuchung wurden 60 Kinder zwischen 4;0 und 6;11 mit zwölf ähnlichen Aufgaben konfrontiert. Zusammengekommen zeigen die Kinder eine

überraschende Kompetenz bei der Bewertung der einfachen arithmetischen Operationen, für Addition und Subtraktion und auch für die kombinierte Anwendung beider Operationen. Schwerer fiel den Vorschulkindern das Urteil, wenn eine Inversion der Operationen in der Aufgabe stattfand (z.B. die Addition eines Objekts wurde wieder aufgehoben) oder wenn die Ausgangsmengen schon ungleich waren (vgl. Brush, 1978, S. 51-53). Erstaunlicherweise haben die Kinder auch dann Schwierigkeiten mit Aufgaben, in denen Inversionen der arithmetischen Operationen vorkommen, wenn sie die Reihenfolge der durchgeführten Operationen erinnern (z.B. zuerst wurde ein Objekt weggenommen, dann wieder hinzugefügt). Offenbar werden die Kinder durch die Fragestellung verwirrt, oder aber sie ziehen bei ihrem Urteil auch den vorhergehenden Zustand der Mengen mit ein. Dennoch lösen die untersuchten Kinder zu 70 % diese Aufgabenstellung. Von besonderem Interesse ist, daß 60 % der Kinder mindestens einmal die Vergleiche als "numerische Aufgabe" deuten, d.h. sie versuchen die durch die Operationen erzeugten Unterschiede mit Hilfe von Zahlen zu interpretieren und finden dann auch die richtige Lösung. Zugleich ist die Schwierigkeit der Kinder mit einigen Aufgabenstellungen darauf zurückzuführen, daß sie keine "exakte Bewertung der Menge" vornehmen können; deuten die Kinder die Veränderungen im Sinne von "Einheiten der Quantität" (vgl. Gal'perin, 1969) (z.B. ein Objekt hinzugefügt, und zwei Objekte bei der 2. Menge weggenommen), würden sie eher ein präzises Urteil erreichen (Brush, 1978, S. 53). Ohne Zweifel "entdecken Kinder die Natur von Addition und Subtraktion außerhalb der formalen Erziehung", und dieses praktische Verständnis des Kindes für die arithmetischen Operationen sollte eigentlich Grundlage für die weitere mathematische Erziehung sein (vgl. Brush, 1978, S. 53; dazu Ginsburg, 1977, 1980).

3. Teil

=====

Bibliographie : Theoretische und empirische Arbeiten zur Entwicklung des Zahlbegriffs

In der nachfolgenden Bibliographie werden wichtige theoretische und empirische Arbeiten aus verschiedenen Fachgebieten zur Entwicklung des Zahlbegriffs zusammengestellt. Die Bibliographie erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit; es wurde jedoch versucht aus den Bereichen der mathematischen Philosophie, der Mathematik, der Mathematikdidaktik, der Sonderpädagogik, der Entwicklungspsychologie und der allgemeinen Psychologie wichtige Arbeiten zusammenzutragen, die Grundlage weiterer theoretischer Arbeiten sein können. Trainingsstudien zum Zahlinvarianzkonzept Piagets wurden nicht berücksichtigt, da sie Teil einer gesonderten theoretischen Arbeit sein sollen.

Die Literaturangaben aus den beiden theoretischen Teilen (1. und 2. Teil dieses Institutsberichts) und aus dem Text, in dem die deskriptive Untersuchung dargestellt wird, wurden in die Bibliographie mitaufgenommen. Es versteht sich von selbst, daß umgekehrt nur ein Teil der Angaben der Bibliographie in den Texten erwähnt wird.

Werden für einen Autoren mehrere Veröffentlichungen unter derselben Jahreszahl geführt, so wird der am häufigsten genannte Titel nur mit der Jahreszahl geführt (z.B. Brainerd, 1973), alle weiteren Titel erhalten einen Buchstaben als Zusatz (z.B. Brainerd, 1973 b).

- Allardice, B.S. The development of representational skills for some mathematical concepts, Dissertation Abstracts, 1978, 38, 3847B - 3848B
- Anderson, N.H. & Cuneo, D.O. The height+width rule in children's judgments of quantity, Journal of Experimental Psychology: General, 1978, 107(4), 335 - 378
- Arena, J. Ed. Building number skills in learning disabled children, San Rafael, Academic Therapy Press, 1970
- Armstrong, J.R. & Schmidt, H. Simple materials for teaching early number concepts to trainable level mentally retarded pupils, Arithmetic Teacher, 1972, 19, 149 - 153
- Ballestra, D.J. Piaget's epistemology of mathematics, Dissertation Abstracts, 1977, 38(9), 5517A
- Barker, S.F. Philosophy of mathematics, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1964
- Barker, S.F. Number in Enzyklopedia of Philosophy, New York, 1967, S. 526 - 530
- Baroody, A.J. The relationship among the development of counting, number conservation and basic arithmetic abilities, Dissertation Abstracts, 1979, A 39(11), 6640A-6641A
- Barry, R.J. Conservation of number: an examination of Piaget's stage analysis, Genetic Psychology Monographs, 1978, 97, 161- 178
- Bartley, S.H. & Nelson, F.H. Numerosity, number, arithmetization and psychology, Philosophy of Science, 1961, 28, 178-203
- Beard, E.M. The order of concept development, studies in two fields, I. Number concepts in the infant school, Educational Review, 1963, 15, 105 - 117
- Bearison, D.J. Induced versus spontaneous attainment of concrete operations and their relation to school achievement, Journal of Educational Psychology, 1975, 67, 576 - 580
- Becher, R. McShane The effect of additional testing on conservation of number performance, Psychology in the Schools, 1977, 14, 225 - 229
- Becher, R. McShane The effects of perceptual transformation experience and numerical operational experiences on numerical correspondences and equivalences, Journal for Research in Mathematics Education, 1978, 9(1), 69 - 74

- Becker, C. Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Suhrkamp, 1975 (Originalausgabe Freiburg, Alber, 1964)
- Beckmann, H. Die Entwicklung der Zahlleistung bei 2 - 6-jährigen Kindern, Zeitschrift für angewandte Psychologie, 1923, 22, 1 - 72
- Beckwith, M. & Restle, F. Process of enumeration, Psychological Review, 1966, 73(5), 437 - 444
- Benacerraf, P. What numbers could not be, Philosophical Review, 1965, 74, 47 - 73
- Bergan, J.R. , Horan, P. & Groff, D. A structural analysis of elementary mathematical tasks purported to form a learning hierarchy, Journal of Structural Learning, 1980, 6, 237 - 245
- Beth, E. & Piaget, J. Mathematical epistemology and psychology, Dordrecht, D.Reidel, 1966 (Études d'épistémologie génétique, Vol. XIV, Épistémologie mathématique et psychologie)
- Bingham-Newman, A.M. & Hooper, F.H. The search for the Woozle circa 1975: commentary on Brainerd's observation, American Educational Research Journal, 1975, 12, 379 - 387
- Binet, A. La perception des longueurs et des nombres chez quelques petits enfants, Revue Philosophique, 1890, 30, 68 - 81 (transl. in Pollack, R.H. & Breuner, M.J. The experimental psychology of Alfred Binet, New York, Springer, 1969)
- Bishop, E. The foundations of constructive mathematics, New York, 1967
- Bjonerud, C. Arithmetic concepts possessed by the preschool child , Arithmetic Teacher, 1960, 7, 347 - 350
- Blank, M. Cognitive functions of language in the preschool years, Developmental Psychology, 1974, 10(2), 229 - 245
- Boersma, F.J. & Wilton, K.M. Eye movements and conservation acceleration, Journal of Experimental Child Psychology, 1974, 17, 49 - 60
- Brace, A. & Nelson, L. The preschool child's concept of number, Arithmetic Teacher, 1965, 12, 126 - 133
- Brainerd, C.J. Mathematical and behavioral foundations of number, Journal of General Psychology, 1973, 88, 221 - 281
- Brainerd, C.J. The origins of the number concept, Scientific American, 1973, 228(3), 101 - 109 (a)

- Brainerd, C.J. Order of acquisition of transitivity, conservation and class inclusion of length and weight, *Developmental Psychology*, 1973, 8(1), 105 - 116 (b)
- Brainerd, C.J. Neo-piagetian training experiments revisited: Is there any support for the cognitive developmental stage hypothesis, *Cognition*, 1973, 2, 349 - 370 (c)
- Brainerd, C.J. Training and transfer of transitivity, conservation and class inclusion of length, *Child Development*, 1974, 45, 324 - 334
- Brainerd, C.J. Inducing ordinal and cardinal representations of the first five natural numbers, *Journal of Experimental Child Psychology*, 1974, 18, 520 - 534 (a)
- Brainerd, C.J. Structures-of-the-whole and elementary education, *American Educational Research Journal*, 1975, 12(3), 369 - 378
- Brainerd, C.J. Concerning Macnamara's analysis of Piaget's theory of number, *Child Development*, 1976, 47, 893 - 896
- Brainerd, C.J. Does prior knowledge of the compensation rule increase susceptibility to conservation training? , *Developmental Psychology*, 1976, 12, 1 - 5 (a)
- Brainerd, C.J. Effects of spatial cues on children's cardinal number judgments, *Developmental Psychology*, 1977, 13(5), 425 - 430
- Brainerd, C.J. Response criteria in concept development, *Child Development*, 1977, 48, 360 - 366 (a)
- Brainerd, C.J. Cognitive development and concept learning, an interpretative review, *Psychological Bulletin*, 1977, 48, 404 - 421 (b)
- Brainerd, C.J. Feedback, rule knowledge and conservation learning, *Child Development*, 1977, 48, 404 - 411 (c)
- Brainerd, C.J. Piaget's theory of intelligence, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1978
- Brainerd, C.J. Learning research and Piagetian theory, in Siegel, L.S. & Brainerd, C.J. Eds. *Alternatives to Piaget: Critical essays on the theory*, New York, Academic Press, 1978 (a)
- Brainerd, C.J. The origins of the number concept, New York, Praeger, 1979
- Brainerd, C.J. Markovian interpretations of conservation learning, *Psychological Review*, 1979, 86(3), 181 - 213 (a)

- Brainerd, C.J. & Allen, T.W. Experimental inductions of the conservation of "first-order" quantitative invariants, *Psychological Bulletin*, 1971, 75, 128 - 144
- Brainerd, C.J. & Brainerd, S.H. Order of acquisition of number and quantity conservation, *Child Development*, 1972, 43, 1401 - 1406
- Brainerd, C.J. & Fraser, M. A further test of the ordinal theory of number conservation, *Journal of Genetic Psychology*, 1975, 127, 21 - 33
- Brainerd, C.J. & Hooper, F.H. A methodological analysis of developmental studies of identity conservation and equivalence conservation, *Psychological Bulletin*, 1975, 82, 725 - 737
- Brainerd, C.J. & Hooper, F.H. More on the identity-equivalence sequence: an update and some replies to Miller, *Psychological Bulletin*, 1978, 35(1), 70 - 75
- Brainerd, C.J. & Howe, M.L. An attentional analysis of small cardinal number concepts in five-year-olds, *Canadian Journal of Behavioral Science*, 1979, 11(2), 112 - 123
- Brainerd, C.J. & Siegel, L.S. How do we know that two things have the same number? Research Bulletin 469; Department of Psychology, University of Western Ontario, London, November 1978
- Brainerd, C.J. & Vanden Heuvel, K. Development of geometric imagery in five- to eight-year olds, *Genetic Psychology Monographs*, 1974, 89, 89 - 143
- Brown, J.S. & Burton, R.R. Diagnostic models for procedural bugs in mathematics, *Cognitive Science*, 1978, 2, 176-204
- Brownell, W.A. The development of children's number ideas in primary grades, *Suppl. Educational Monographs*, 1928, 35, 1 - 241
- Brush, L.R. Preschool children's knowledge of addition and subtraction, *Journal for Research in Mathematics Education*, 1978, 9, 44 - 54
- Brush, L.R., Brett, L.J. & Sprotzer, E.R. Children's difficulties on quantitative tasks: are they simply a misunderstanding of relational terms, *Journal for Research in Mathematics Education*, 1978, 10(2), 149 - 151
- Bryant, P.E. The understanding of invariance by very young children, *Canadian Journal of Psychology*, 1972, 26, 78 - 96
- Bryant, P.E. Perception and understanding in young children, New York, Basic, 1974
- Bullock, M. & Gelman, R. Numerical reasoning in young children: the ordering principle, *Child Development*, 1977, 48, 427 - 434

- Campbell, R. , Donaldson, M. & Young, B. Constraints on classificatory skills in young children, *British Journal of Psychology*, 1976, 67(1), 89 - 100
- Calder, A. Konstruktive Mathematik, *Spektrum der Wissenschaft*, 1979, Heft 12, 49 - 56
- Carper, D.R. Seeing numbers as groups in primary grade arithmetic, *Elementary School Journal*, 1942, 43, 166 - 170
- Case, R. Intellectual development from birth to adulthood, a neopiagetian interpretation, in Siegler, R. S. Ed. *Children's thinking: what develops*, Hillsdale, N.J., Erlbaum, 1978 , S. 37 - 71
- Case, R. The underlying mechanism of intellectual development, in Kirby, J.R. & Biggs, J.B. Eds. *Cognition, development and instruction*, New York, Academic Press, 1980, S. 5 - 37
- Case, R. , Kurland, M. & Daneman, M. (u. Emanuel, P.) Operational efficiency and the growth of M-space, Paper presented at the biennial meeting of the Society for Research in Child Development, San Francisco, 1975
- Cassirer, E. *Philosophie der symbolischen Formen, Erster Teil Die Sprache* (erschienen 1923), Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1964
- Castaneda, H.N. Arithmetic and reality, *The Australasian Journal of Philosophy*, 1959, 37(2), 92 - 107
- Choat, E. The relative development in young children of geometrical and numerical concepts, *Educational Studies*, 1977, 3(2), 155 - 169
- Claxton, G. & Acres, F. Does how you learn maths influence how you form concepts, *British Journal of Educational Psychology*, 1978, 48, 79 - 83
- Clothiaux, C.-A. An investigation into the ordinality-cardinality controversy between the theories of Brainerd and Piaget, *Dissertation Abstracts*, 1978, A39,4, 2111A
- Cochran, B.S. , Barson, A. & Davis, R.B. Child created mathematics, *Arithmetic Teacher*, 1970, 17, 211 - 215
- Cohen, M.A. & Gross, P.J. The developmental resource: Behavioral sequences for assessment and program planning, Volume 2, New York, Grune & Stratton, 1979, S. 112 - 139
- Cohn, R. Developmental dyscalculia, *Pediatric Clinics of North America*, 1968, 15, 651 - 668

- Comiti, C. Les premiers acquisitions de la notion de nombre chez l'enfant, *Educational Studies in Mathematics*, 1980, 11, 301 - 318
- Copeland, E.W. How children learn mathematics, Teaching implications of Piaget's research, London, MacMillan, 1970
- Cornwell, A.C. Development of language, abstraction and numerical concept formation in Down's Syndrome children, *American Journal of Mental Deficiency*, 1974, 79(2), 179 - 190
- Court, S.R. Numbers, time and space in the first years of a child's life, *Pedagogical Seminary*, 1920, 27, 71 - 89
- Court, S.R. Self-taught arithmetic from the age of five to the age of eight, *Pedagogical Seminary*, 1923, 30, 51 - 68
- Cowan, R. A reappraisal of the relation between performances of quantitative identity and quantitative equivalence conservation tasks, *Journal of Experimental Child Psychology*, 1979, 28, 68 - 80
- Cowan, R. Performance in number conservation tasks as a function of the number of items, *British Journal of Psychology*, 1979, 70, 77 - 81
- Coxford, A.F. Jr. Piaget : number and measurement, *Arithmetic Teacher*, 1963, 10, 419 - 427
- Churchill, E.M. Counting and measuring, Toronto, University of Toronto Press, 1961
- Dantzig, T. Number: the language of science, 3 rd ed. , New York, MacMillan, 1939
- Dantzig, T. Number : the language of science, New York, Anchor Book, 1954
- Damerow, P. Was ist mathematische Leistung und wie entstehen die Leistungsunterschiede im Mathematikunterricht ? *Neue Sammlung*, 1980, 20(3), 253 - 273
- Daurant-Meljac, C. & Miszyski, G. Number operations in children 4 to 7-years old, *Revue de Psychologie Appliquée*, 1976, 26(4), 617 - 649
- Davis, R. The structure of mathematics and the structure of cognitive development, *The Journal of Children's Mathematical Behavior*; 1971/1972, 1, 71 - 90
- Davison, M.L. et al The stage sequence concept in cognitive and social development, *Developmental Psychology*, 1980, 16(2), 121 - 131

- Deans, E. The contributions of grouping to number development, *Childhood Education*, 1941, 17, 307- 310
- Descocudres, A. Le développement de l'enfant de deux à sept ans, Paris, Delachaux and Niestle, 1921
- Dimitrovsky, L. & Almy, M. Early conservation as a predictor of arithmetic achievement, *Journal of Psychology*, 1975, 91, 65 - 70
- Dixon, M.H. Ranking some mathematics skills of preschoolers, *Psychological Reports*, 1977, 41, 223 - 226
- D'Mello, S. & Willemsen, E. The development of the number concept: a scalogram analysis, *Child Development*, 1969, 40, 681 - 688
- Dodwell, P.C. Children's understanding of number and related concepts, *Canadian Journal of Psychology*, 1960, 14, 191 - 205
- Dodwell, P.C. Children's understanding of number concepts, characteristics of an individual and a group test, *Canadian Journal of Psychology*, 1961, 15, 29 - 36
- Dodwell, P.C. Relations between the understanding of the logic of classes and of cardinal number in children, *Canadian Journal of Psychology*, 1962, 16, 152 - 160
- Drummond, M. The psychology and teaching of number, New York, World Book Comp. 1922
- Easley, J.A. Jr. Four decades of conservation research, what do they mean for mathematics education,? in Gallagher, J. McC. & Easley, J.A. Jr. Eds. Knowledge and Development, Volume 2 :Piaget and Education, New York, Plenum Press, 1978, S. 139 - 176
- Easley, H.A. Jr. Book Review, Gelman, R. & Gallistel, C.R. The child's understanding of number, Harvard University Press, in *Educational Researcher*, 1980, 9(2), 19 - 20
- Ebbinghaus, H.-D. Zur mengentheoretischen Begründung der natürlichen Zahlen, *Mathematischer Unterricht*, 1974, 5, 27 - 42
- Elkind, D. Piaget's conservation problems, *Child Development*, 1967, 38, 15 - 27
- Estes, B. & Combs, A. Perception of quantity, *Journal of Genetic Psychology*, 1966, 108, 333 - 336

- Feigenbaum, K. A study of the relationship between physical transitivity and social transitivity, Genetic Psychology Monographs, 1974, 90, 3 - 43
- Feldman, C.F. & Toulmin, S. Logic and the theory of mind, in Arnold, W.J. Ed. Nebraska Symposium on Motivation, Lincoln, University of Nebraska, Volume 23, 1976, S. 409 - 476
- Fischbein, E. The intuitive sources of probabilistic thinking, in children, Dordrecht, Reidel, 1975
- Fischbein, E., Tirosh, D. & Hess, P. The intuition of infinity,, Educational Studies of Mathematics, 1979, 10, 3 - 40
- Fischer, K.W. A theory of cognitive development: the control and construction of hierarchies of skills, Psychological Review, 1980, 87(6), 477 - 531
- Fitzhugh, J.L. The role of subitizing and counting in the development of the young child's conception of small numbers, Dissertation Abstracts, 1978, 38, 9-8, 4503
- Flavell, J.H. The developmental psychology of Jean Piaget, Princeton, N.J., VanNostrand, 1963
- Flavell, J.H. Stage related properties of cognitive development, Cognitive Psychology, 1971, 2, 421 - 453
- Flavell, J.J. An analysis of cognitive developmental sequences, Genetic Psychology Monographs, 1972, 86, 279 - 350
- Flavell, J.H. Cognitive development, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1977
- Freeman, F.S. Experiments in the perception of number in children and adults, Psychological Bulletin, 1911, 8, 43 - 44
- Freeman, F.S. Grouped objects as a concrete basis for the number idea, Elementary School Teacher, 1912, 12, 306 - 314
- Freudenthal, H. Mathematik als pädagogische Aufgabe, 2 Bände, Stuttgart, Klett, 1973/1974
- Fricke, A. Operative Lernprinzipien im Mathematikunterricht der Grundschule, in Besuden, H. & Fricke, A. Mathematik - Elemente einer Didaktik und Methodik, Stuttgart, Klett, 1970, S. 79 - 116
- Froman, T. & Hubert, L.J. Application of prediction analysis to developmental priority, Psychological Bulletin, 1980, 87(1), 136 - 146
- Funk, P.E. Concrete collections as the basis for generalization at the preoperational stage of classification development, Dissertation Abstracts, 1979, 39, 11, 6650A

- Fuson, K.C. The counting word sequence as a representational tool, Paper presented at the International Group for The Psychology of Mathematics Education, Berkeley, California, August 1980
- Fuson, K.C. The development of counting words and of the counting act, Paper presented at the Fourth International Congress on Mathematical Education, Berkeley, California August 1980 (a)
- Fuson, K.C. An analysis of the counting-on solution procedure in addition, in Romberg, T., Carpenter, T. & Moser, J. Eds. Addition and subtraction: a developmental perspective, 1981 (in Druck)
- Fuson, K.C. & Mierkiewicz, D.B. A detailed analysis of the act of counting, Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Boston, 1980
- Fuson, K.C. & Richards, J. Children's construction of the counting numbers, from a spew to a bidirectional chain, Preliminary draft, July 1979, Northwestern University
- Fuson, K.C. , Secada, W. & Hall, J.W. Effects of counting and matching on conservation of number, Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Boston 1980
- Fuys, D.J. & Tischler, W. Teaching mathematics in the elementary school, Boston, Little Brown, 1979
- Gagné, R. The conditions of learning, New York, Holt, Rinehart & Winston, 1965
- Gal'perin, P.Y. Stages in the development of mental acts, in Cole, M. & Maltzman, I. Eds. A handbook of contemporary soviet psychology , New York, Basic Books, 1969, S. 249 - 273
- Gal'perin, P.Y. & Georgiev, L.S. The formation of elementary mathematics notions, in Kilpatrick, J. & Wirzup, J. Eds. Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics, Chicago, University of Chicago , 1969
- Gast, H. Der Umgang mit Zahlen und Zahlengebilden in der frühen Kindheit , Zeitschrift für Psychologie, 1957, 161, 1 - 90
- Gelman, R. The nature and development of early number concepts in Reese, H.W. Ed. Advances in Child Development and Behavior, Volume VIII, New York, Academic Press, 1972

- Gelman, R. Logical capacity of very young children, number invariance rules, *Child Development*, 1972, 43, 75 - 90
- Gelman, R. How young children reason about small numbers, in Castellan, N.J. et al Eds. *Cognitive theory*, Volume 2, Hillsdale, N.J., Lawrence Erlbaum, 1977, S. 219- 238
- Gelman, R. Counting in the preschooler: what does and does not develop, in Siegler, R.S. Ed. *Children's thinking: what develops*, Hillsdale, N.J., Lawrence Erlbaum, 1978, S. 213 - 241
- Gelman, R. Cognitive development, *Annual Review of Psychology*, 1978, 29, 297 - 332 (a)
- Gelman, R. Preschool thought, *American Psychologist*, 1979, 34(10), 900 - 905
- Gelman, R. What young children know about numbers, *Educational Psychologist*, 1980, 15(1), 54 - 68
- Gelman, R. & Gallistel, C.R. *The child's understanding of number*, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1978
- Gelman, R. & Tucker, M.F. Further investigations of the young child's conception of number, *Child Development*, 1975, 46, 167 - 175
- Gillieron, C. Décalages and seriation, *Archives de Psychologie*, 1976, 44, Monogr. Suppl. 3, 1 - 152
- Ginsburg, H.J. Age related variation of topological evaluation of numerical quantity in nonconserving children, *Developmental Psychology*, 1975, 11, 872 - 873
- Ginsburg, H.P. *Children's arithmetic: the learning process*, New York, VanNostrand, 1977
- Ginsburg, H.P. Children's surprising knowledge of arithmetic, *Arithmetic Teacher*, 1980, 28(1), 42 - 44
- Glaus, I. & Senft, W. *Mathematische Früherziehung*, Stuttgart, Klett, 1969
- Gollin, E.S., Moody, M. & Schadler, M. Relational learning of a size concept, *Developmental Psychology*, 1974, 10(1), 101 - 107
- Gonchar, A.J. A study in the nature and development of the natural number concept, Initial and supplementary analysis, Technical Report 340, Wisconsin Research and Development Center, 1975

- Goodman, L.H. & Kruskal, W.H. Measures of association for cross-classification, *Journal of the American Statistical Association*, 1954, 49, 723 - 764
- Goodman, L.H. & Kruskal, W.H. Measures of association for cross-classifications, II. Further discussion and references, *Journal of the American Statistical Association*, 1959, 54, 123 - 163
- Goodstein, R.L. Recursive number theory, *Studies in logic and the foundations of mathematics*, Amsterdam, 1957
- Goodstein, R.L. *Fundamental concepts of mathematics*, Oxford, Pergamon Press, 1964
- Gréco, P. Quotité and quantité in Piaget, J. Ed. *Structures numériques élémentaires, Études d'épistémologie génétique*, Vol. 12, Paris, Presses Universitaires de France, 1962
- Gréco, P., Grize, J.B., Papert, S. & Piaget, J. *Problèmes de la construction du nombre, Études d'épistémologie génétique*, Vol. 11, Paris, Presses Universitaires de France, 1960
- Greeno, J.G. Development of processes for understanding problems, Paper presented at Heidelberg Conference on Metacognition, July 1980
- Groen, G. & Resnick, L.B. Can preschool children invent addition algorithms, *Journal of Educational Psychology*, 1977, 69(6), 649 - 652
- Gruber, H.E. & Vonèche, J.J. *The essential Piaget*, New York, Basic Books, 1977
- Halford, G.S. A theory of the acquisition of conservation, *Psychological Review*, 1970, 77, 302 - 316
- Halford, G.S. An approach to the definition of cognitive developmental stages in school mathematics, *British Journal of Educational Psychology*, 1978, 48, 298 - 314
- Halford, G.S. Toward a working model of cognitive developmental stages, in Keats, J.A., Collis, K.F. & Halford, G.S. Eds. *Cognitive development, research based on a neopiagetian approach*, London, Wiley, 1978
- Halford, G.S. & Wilson, W.H. A category approach to cognitive development, *Cognitive Psychology*, 1980, 12, 356 - 411

- Hebbeler, K. Young children's addition, *The Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1977, 1, 108 - 121
- Heimer, R.T. Conditions of learning in mathematics: sequence theory development, *Review of Educational Research*, 1969, 39, 493 - 508
- Hendrickson, A. Dean An inventory of mathematics thinking done by incoming first grade children, *Journal for Research in Mathematics Education*, 1979, 10(1), 7 - 23
- Henry, D.E. Interrelationships among attentional preferences, cardinal-ordinal ability and conservation of number, *Child Development*, 1976, 47, 750 - 758
- Hildebrand, D. , Laing, M. & Rosenthal, A. Prediction analysis of cross-classifications, New York, Wiley, 1977
- Hofmann, R. & Trepanier, M. Scaling a single attribute: a methodological study of conservation, *Journal of Genetic Psychology*, 1975, 126, 233 - 242
- Holmes, E. What the prefirst grade children know about numbers, *Elementary School Journal*, 1963, 63, 397 - 403
- Hood, H.B. An experimental study of Piaget's theory of the development of number in children, *British Journal of Psychology*, 1962, 53, 273 - 286
- Hooper, F.H. , Toniolo, T.A. & Sipple, T.S. A longitudinal analysis of logical reasoning relationships: conservation and transitive inference, *Developmental Psychology*, 1978, 14(6) , 674 - 682
- Hooten, J.R. Ed. Teaching mathematics in the elementary school, Volume XIV of Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, University of Chicago, 1975
- Hunt, J.McV., Kirk, G.E. & Volkman, F. Social class and preschool language skills V. Cognitive and semantic mastery of numbers, *Genetic Psychology Monographs*, 1975, 92, 131 - 153
- Ilg, F. & Ames, F.B. Developmental trends in arithmetic, *Journal of Genetic Psychology*, 1951, 79, 3 - 28
- Inhelder, B. , Blanchet, A. , Sinclair, A. & Piaget, J. Relations entre les conservations d'ensembles d'éléments discretes et celles de quantités continues, *Année Psychol.*, 1975, 75, 23 - 60

- Inhelder, B. & Piaget, J. Die Entwicklung der elementaren logischen Strukturen, Teil I, Düsseldorf, Schwann, 1973
- Inslap, J.E. Jr. Building a case for the application of Piaget's theory and research in the classroom, *Arithmetic Teacher*, 1972, 19, 255 - 260
- Jahnke, H.N., Steinbring, E. & Vogel, D. Zahlbegriff und Rechenfertigkeiten - Zur Problematik der Entwicklung wissenschaftlicher Begriffe, *Educational Studies in Mathematics*, 1975, 6, 213 - 252
- Jahnke, H.N., Steinbring, E. & Vogel, D. Zur Problematik der Zahlbegriffsentwicklung, *Zeitschrift für Pädagogik*, 1975, 21(1), 1 - 18 (a)
- Jensen, E.M., Reese, E.P. & Reese, T.W. The subitizing and counting of visually presented fields of dots, *Journal of Psychology*, 1950, 30, 363 - 372
- Johnson, S.W. Arithmetic and learning disabilities, Guidelines for identification and remediation, Boston, Allyn & Bacon, 1979
- Johnson, D.C. & Steffe, C. Problem-solving performances of first grade children, *Journal for Research in Mathematics Education*, 1971, 2, 50 - 64
- Kahn, J.V. & Garrison, M. The effects of age, stimuli and order of presentation of the stimuli on conservation of number, *British Journal of Educational Psychology*, 1973, 43, 249 - 256
- Kaplan, J.D. What is readiness, *Arithmetic Teacher*, 1967, 14(3), 216 - 217
- Katz, H. & Beilin, H. A test of Bryant's claims concerning the young child's understanding of quantitative invariance, *Child Development*, 1976, 47, 877 - 880
- Kaufman, E.L., Lord, M.W., Reese, T.W. & Volkman, J. The discrimination of visual number, *American Journal of Psychology*, 1949, 62, 498 - 525
- Kaye, K. The development of skills in Whitehurst, G.J. & Zimmerman, B.J. Eds. The function of language and cognition, New York, Academic Press, 1979, 23 - 55

- Killelea, A.R. Developing number ideas in the kindergarten, *Arithmetic Teacher*, 1967, 14, 396 - 397
- Kirsch, A. Über Ziele der "neuen Mathematik" in der Schule, *Westermanns Pädagogische Beiträge*, 1974, 26, 155 - 164
- Klahr, D. Quantification processes, in Chase, W.G. Ed. *Visual information processing*, New York, Academic Press, 1973, S. 3 - 34
- Klahr, D. & Wallace, J.G. Class inclusion processes in Farnham-Diggory, S. Ed. *Information processing in children*, New York, Academic Press, 1972, S. 143 - 181
- Klahr, D. & Wallace, J.G. The role of quantification operators in the development of conservation of quantity, *Cognitive Psychology*, 1973, 4, 301 - 327
- Klahr, D. & Wallace, J.G. *Cognitive development : an information processing view*, Hillsdale, N.J., Erlbaum, 1976
- Kline, M. *Mathematical thought from ancient to modern time*, New York, Oxford University Press, 1972, 1238 pp.
- Klix, F. *Erwachendes Denken, Eine Entwicklungsgeschichte der menschlichen Intelligenz*, Berlin, VEB, 1980
- Knopp, K. *Elements of the theory of functions*, New York, Dover, 1952
- Kofsky, E. A scalogram study of classificatory development, *Child Development*, 1966, 37, 191- 204
- Kronberg, D. & Winer, G. Children's responses to verbally and pictorially presented class inclusion items and a task of number conservation, *Journal of Genetic Psychology*, 1974, 125, 141 - 152
- Krus, D.J. Order analysis : an inferential method of dimensional analysis and scaling, *Educational and Psychological Measurement*, 1977, 37, 587 - 601
- Krus, D.J., Bart, W.M. & Airislian, P.W. *Ordering theory and methods*, Los Angeles, Theta Press, 1975
- Kuhn, D. Inducing development experimentally: comments on a research paradigm, *Developmental Psychology*, 1974, 10, 590 - 600
- Langer, J. *The origins of logic, Six to twelve months*, New York, Academic Press, 1979

- LaPointe, K. & O'Donnell, J.P. Number conservation in children below age six: its relationships to age, perceptual dimensions and language comprehension, *Developmental Psychology*, 1974, 10, 422 - 428
- Larsen, G.V. Methodology in developmental psychology, an examination of research in Piagetian theory, *Child Development*, 1977, 48, 1160 - 1166
- Lawson, G. , Baron, J. & Siegel, L. The role of number and length cues in children's quantitative judgments, *Child Development*, 1974, 45, 731- 736
- Light, R.J. Issues in the analysis of qualitative data, in Travers, R.M.W. Ed. *Second Handbook of Research on Teaching*, Chicago, RandMcNally, 1973, S. 318 - 381
- Lingoes, J.C. Multiple scalogram analysis : a set-theoretical model for analyzing dichotomous items, *Educational and Psychological Measurement*, 1963, 23, 501 - 524
- Long, L. & Welch , L. The development of the ability to discriminate and match numbers, *Journal of Genetic Psychology*, 1941, 59, 377 - 387
- Lovell, K.R. The developmental approach of Jean Piaget , in *Cognitive Models and Development in Mental Retardation*, American Journal of Mental Deficiency, Monograph Supplement, 1966, 70 , 84 - 89
- Lovell, K.R. Mathematical concepts , in Klausmeier, E.J. & Harris, C.W. Eds. *Analysis of concept learning*, New York, Academic Press, 1969
- Lovell, K.R. Intellectual growth and understanding mathematics, implications for teaching, *Arithmetic Teacher* 1972, 19, 277 - 282
- Lovell, K.R. Intellectual growth and understanding mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education*, 1972, 3, 164 - 182 (a)
- Macnamara, J. A note on Piaget and number, *Child Development*, 1975, 46, 424 - 429
- Macnamara, J. A reply to Brainerd, *Child Development*, 1976, 47, 897 - 898
- Maertens, N.W., Jones, R.C. & Waite, A. Elemental groupings help children perceive cardinality: a two phase research study, *Journal for Research in Mathematics Education*, 1977, 8(3), 181 - 193

- Markman, E. M. Classes and collections : conceptual organization and numerical abilities, *Cognitive Psychology*, 1979, 11, 395 - 411
- Martin, G. Methodische Probleme der Metaphysik der Zahl, *Studium Generale*, 1955, 6 (10), 610 - 616
- Mayer, R.E. Different rule systems for counting behavior acquired in meaningful and rote contexts of learning, *Journal of Educational Psychology*, 1977, 69(5), 537 - 546
- McDowell, L. Number concepts and preschool children, *Arithmetic Teacher*, 1962, 9, 439 - 455
- McLaughlin, K.L. Number ability in preschool children, *Childhood Education*, 1935, 11, 348 - 353
- McLellan, J.A. & Dewey, J. The psychology of number, New York, Appleton & Co, 1895
- Mehler, J. & Bever, T.G. Cognitive capacity of very young children, *Science*, 1967, 158, 141 - 142
- Mehler, J. & Bever, T.G. Reply (to Piaget) , *Science*, 1968, 162, 979 - 981
- Menninger, K. Zahlwort und Ziffer, Eine Kulturgeschichte der Zahl, Göttingen, 1958
- Miller, P.H. Perceptual supports for one-to-one correspondence in the conservation of number, *Journal of Experimental Child Psychology*, 1976, 21, 417 - 424
- Miller, P.H. Stimulus variables in conservation: an alternative approach to assessment, *Merrill-Palmer Quarterly*, 1978, 24(3) , 139 - 160
- Miller, P.H. Stimulus dimensions, problem solving and Piaget, in Hale, G. & Lewis, M. Eds. Attention and cognitive development, New York, Plenum Press, 1979. S. 97 - 118
- Miller, P.H. & Heller, K.A. Facilitation of attention to number and conservation of number, *Journal of Experimental Child Psychology*, 1976, 22 , 454 - 467
- Miller, P.H. , Heldmeyer, K.H. & Miller, S.A. Facilitation of conservation of number in young children, *Developmental Psychology*, 1975, 11, 253
- Miller, S.A. Nonverbal assessments of Piagetian concepts, *Psychological Bulletin*, 1976, 83, 407 - 430
- Miller, S.A. Nonverbal assessment of conservation of number, *Child Development*, 1976, 47, 722 - 728 (a)

- Miller, S.A. Identity conservation and equivalence conservation: a critique of Brainerd and Cooper's analysis, *Psychological Bulletin*, 1978, 85, 58 - 69
- Miller, S.A. Candy is dandy and also quicker : a further nonverbal study of conservation of number, *Journal of Genetic Psychology*, 1979, 134, 15 - 21
- Miller, S.A. Assessment of conservation of number : an attempt to enhance ecological validity and diagnostic sensitivity, *Genetic Psychology Monographs*, 1980, 101, 271 - 285
- Mischel, T. Piaget and the nature of psychological explanations, in Murray, F.B. Ed. *The impact of piagetian theory: on education, philosophy, psychiatry and psychology*, Baltimore, University Park Press, 1979, S. 89 - 107
- Mpiangu, B.D. & Gentile, J.R. Is conservation of number a necessary condition for mathematical understanding, *Journal for Research in Mathematics Education*, 1975, 6, 179 - 192
- Moore, G.W. Transitive inferences within seriation problems assessed by judgments and strategies, *Child Development*, 1979, 50, 1164 - 1172
- Moore, G.W. & Gallgher, J.McC. Analysis of strategies within seriation problems, *APA Convention Proceedings*, 1973, 614-614
- Müller, G. & Wittman, E. *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe*, Braunschweig, Vieweg, 1977
- Neeman, U. Mathematischer Grundschulunterricht und mathematische Grundlagenforschung, *Pädagogische Rundschau*, 1971, 12, 778 ff.
- Neeman, U. Das Problem der Anschaulichkeit in der modernen Mengendidaktik, *Westermanns Pädagogische Beiträge*, 1974, 26, 385 - 391
- Neufeld, H. & Scott, L. Concrete instruction in elementary school mathematics: pictorial vs. manipulative, *School Science and Mathematics*, 1976, 76, 68 - 72
- Noelting, G. Stages and mechanism in the development of the concept of proportion in the child and adolescent, Paper given at 5th Interdisciplinary Seminar on Piagetian Theory and its implications for the helping professions, University of Southern California, Los Angeles, 1975

- Oberschelp, A. Bemerkungen über den Zahlbegriff, Mathematischer Unterricht, 1974, 2, 19 - 26
- Oberty, H.S. The range of visual attention, cognition and apprehension, American Journal of Psychology, 1924, 35, 332 - 352
- O'Bryan, K.G. & Boersma, F.J. Eye movements, perceptual activity and conservation, Journal of Experimental Child Psychology, 1971, 12, 157 - 169
- O'Bryan & Boersma, F.J. Movie presentation of Piagetian tasks a procedure for the assessment of conservation attainment, Journal of Genetic Psychology, 1972, 121, 295 - 302
- Odom, R.D. A perceptual salience account of décalage relations and developmental change, in Siegel, L.S. & Brainerd, C.R. Eds. Alternatives to Piaget: critical essays on the theory, New York, Academic Press, 1978, S. 111 - 130
- Oehl, W. Psychologische Untersuchungen über Zahlendenken und Rechnen bei Schulanfängern, Zeitschrift für angewandte Psychologie und Charakterkunde, 1935, 49, 305 - 351
- Osherson, D.N. Logical abilities in children, Volume I + II, Potomac, Erlbaum, 1974
- Pascual-Leone, J. On learning and development, Piagetian style, I.A reply to Lefebvre-Pinard, Canadian Psychological Review, 1976, 17(4), 271 - 288
- Pascual-Leone, J. et al. Piagetian theory and neopiagetian analysis as psychological guides in education, in Gallagher, J. McC. & Easley, J.E. Jr. Eds. Knowledge and Development, Volume 2, Piaget and Education, 1978, S. 243 - 289
- Patterson, J.G. Order of emergence of number conservation, seriation and transitivity of length using the criteria of judgments ..., Dissertation Abstracts, 1978, A 38, 7236 A
- Pennington, B.F., Wallach, L. & Wallach, M.A. Nonconservers' use and understanding of number and arithmetic, Genetic Psychology Monographs, 1980, 101, 231 - 243
- Piaget, J. Quantification, conservation and nativism, Science, 1968, 162, 976 - 979
- Piaget, J. Piaget's theory, in Mussen, P. Ed. Carmichael's Manual of Child Psychology, 3rd.ed. New York, Wiley, Volume 1, 1970, S. 703 - 722

- Piaget, J. *Biology and knowledge*, Chicago, Chicago University Press, 1971 (*Biologie et connaissance*, Paris, Gallimard, 1967)
- Piaget, J. *Die Entwicklung des Erkennens*, Band I. *Das mathematische Denken*, Stuttgart, Klett, 1975
- Piaget, J. *Recherches sur la contradiction*, 1) *Les différentes formes de la contradiction*, *Études d'épistémologie génétique*, Band XXXI, Paris, Presses Universitaires de France, 1976 (a)
- Piaget, J. *Recherches sur la contradiction*, 2) *Les relations entre affirmations et négations*, *Études d'épistémologie génétique*, Band XXXII, Paris, Presses Universitaires de France, 1976 (b)
- Piaget, J. *The grasp of consciousness*, Cambridge, Harvard University Press, 1976 (c)
- Piaget, J. *Some recent research and its link with a new theory of groupings and conservations based on commutability*, *Annals of the New York Academy of Science*, 1977, 291, 350 - 357
- Piaget, J. *Die Äquilibration kognitiver Strukturen*, Stuttgart, Klett, 1977 (*L' équilibration des structures cognitives, Problème central du développement*, *Études d'épistémologie génétique*, Band XXXIII, Paris, Presses Universitaires de France, 1975) (a)
- Piaget, J. *Identität und Invarianzbegriff*, in Inhelder, B. & Chipman, H. Hrsg. *Von der Kinderwelt zur Erkenntniswelt*, Wiesbaden, Akademische Verlagsanstalt, 1978, S. 114-127
- Piaget, J. *Recherches sur l'abstraction réfléchissante*, 1) *L'abstraction des relations logico arithmétiques*, *Études d'épistémologie génétique*, Band XXXIV, Paris, Presses Universitaires de France, 1978 (a)
- Piaget, J. *Correspondences and transformations*, in Murray, F.B. Ed. *The impact of piagetian theory : on education, philosophy, psychiatry and psychology*, Baltimore, University Park Press, 1979, S. 17 - 27
- Piaget, J., Resag, Fricke, A. Van Diele. *Rechenunterricht und Zahlbegriff*, Braunschweig, 1964
- Piaget, J. & Szeminska, A. *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde*, Stuttgart, Klett, 1975
- Piaget, J. & Voyat, G. *The possible, the impossible and the necessary*, in Murray, F.B. Ed. *The impact of piagetian theory : on education, philosophy, psychiatry and psychology*, Baltimore, University Park Press, 1979, S. 65 - 85

- Piattelli-Palmarini, M. Ed. Language and learning, the debate between Jean Piaget and Noam Chomsky, London, Routledge, 1980 (Théories du langage, théories de l'apprentissage, Éditions du Seuil, 1979)
- Rautenberg, W. Zur Frage der Arithmetik und ihrer Begründung in der Schule, Mathematischer Unterricht, 1974, 2, 43 - 56
- Rea, R. & Reys, R. Mathematical competencies of entering kindergartners, Arithmetic Teacher, 1970, 17, 63 - 74
- Rea, R. & Reys, R. Competence of entering kindergartners in geometry, number, money and measurement, School Science and Mathematics, 1971, 71, 389 - 402
- Reinhardt, F. & Soeder, dtv- Atlas zur Mathematik, Band I. Grundlagen, Algebra und Geometrie, dtv, München, 1978, 3. Aufl.
- Reisman, P.K. Diagnostic teaching of elementary school mathematics, Chicago, RandMcNally, 1977
- Reisman, F.K. Mathematics for exceptional children: instructional adaptations suggested by development and learning theory research, Columbus, Ohio, Merrill, 1980
- Resnick, L.B. et al. Task analysis in curriculum design : a hierarchically sequenced introductory mathematics curriculum, Journal of Applied Behavior Analysis, 1973, 6, 679 - 710
- Resnick, L.B. & Ford, W.W. The psychology of mathematics for instruction, Hillsdale, N.J. Erlbaum, 1980
- Reys, R. & Rea, R. The comprehensive mathematics inventory: an experimental instrument for assessing youngsters entering school, Journal for Research in Mathematics Education, 1970, 1,
- Richards, J. & Glasersfeld, E. von , Jean Piaget, Psychologist of the real, a discussion of Rotman's Jean Piaget: Psychologist of the Real, Journal for Research in Mathematics Education, 1980, 11(1), 29 - 36
- Riedel, L.A. & Burns, P.C. Research on teaching of elementary school mathematics, , in Travers, R.M.W. Ed. Second Handbook of Research on Teaching, Chicago, RandMcNally, 1973, S. 1149 - 1176
- Riess, A. An analysis of children's number responses, Harvard Educational Review, 1943, 13, 149 - 162
- Robert, M. , Cellerier, G. & Sinclair, F. Une observation de la genèse du nombre, Archives de Psychologie, 1972, XLI(164), 289 - 301

- Roberts, R.S. Concurrent validity in tests of Piagetian developmental level, *Journal of Research in Science Teaching*, 1980, 17(4), 343 - 350
- Robertson, J.H.S. The effectiveness of Piagetian conservation tasks in the prediction of arithmetic achievement, *Dissertation Abstracts*, 1979, A40, 5, 2462A
- Rothenberg, B. Conservation of number in 4 and 5-year old children, *Child Development*, 1969, 40, 383 - 406
- Rothenberg, B. Preschool children's understanding of the coordinated concepts of distance, movement, number and time, *Journal of Genetic Psychology*, 1969, 115, 263 - 276 (a)
- Rothenberg, B.B. & Courtney, R.G. Conservation of number in very young children, *Developmental Psychology*, 1969, 1, 493 - 502
- Rothenberg, B.B. & Orost, J.H. The training of conservation of number in young children, *Child Development*, 1969, 40, 707 - 726
- Rush, G. Visual grouping in relation to age, *Archives of Psychology*, 1937, 31, 95 - 137
- Russac, R.J. The relation between two strategies of cardinal number: correspondence and counting, *Child Development*, 1978, 49, 728 - 735
- Russell, B. Einführung in die mathematische Philosophie, München, Drei Masken Verlag, 1923
- Russell, B. The principles of mathematics, London, George Allen & Unwin Ltd., 1956
- Russell, N.M. Arithmetical concepts in children, *Journal of Educational Research*, 1936, 29, 647 - 669
- Saxe, G.B. A developmental analysis of notational counting, *Child Development*, 1977, 48, 1512 - 1520
- Saxe, G.B. Developmental relations between notational counting and number conservation, *Child Development*, 1979, 50, 180 - 187
- Scandura, J.M. A theory of mathematical knowledge : can rules account for creative behavior ? *Journal for Research in Mathematics Education*, 1971, 2, 183 - 196

- Scandura, J.M. Plan for the development of conceptually based mathematics curricula for disadvantaged children, Part II., *Instructional Science*, 1972, 2, 363 - 387
- Scandura, J.M. Measurement sequences, Piagetian structures and higher order rules, *Brain and Behavioral Sciences*, 1978, 2,
- Scandura, J.M. & McGee, R. An exploratory investigation of basic mathematical abilities of kindergarten children, *Educational Studies in Mathematics*, 1972, 4, 331 - 345
- Scandura, J.M. & Scandura, A.B. Structural learning and concrete operations, an approach to Piagetian conservation, New York, Praeger, 1980
- Schaeffer, G., Eggleston, V.H. & Scott, J.L. Number development in young children, *Cognitive Psychology*, 1974, 6, 357 - 379
- Schlisong, G.W. Mathematics in kindergarten, *Arithmetic Teacher*, 1967, 14, 292 - 295
- Schmidt, P.A. Understanding in mathematics, some philosophical and psychological considerations, *Dissertation Abstracts*, 1978, 39, 2, 734A
- Schwartz, A. Assessment of mathematical concepts of 5 year old children, *Journal of Experimental Education*, 1969, 67 - 74
- Seidenberg, A. The ritual origin of counting, *Archiv for History of Exact Science*, Band II, Berlin, 1962-1966
- Seidel, G.S. Zahlbegriffsentwicklung und Erstrechenunterricht, Weinheim, Beltz, 1973
- Shannon, L. Spatial strategies in the counting of young children, *Child Development*, 1978, 49, 1212 - 1215
- Shepp, B.E. From perceived similarity to dimensional structure: a new hypothesis of perceptual development, in Rosch, E. & Lloyd, B.B. Eds. *Cognition and categorization*, Hillsdale, N.J., Erlbaum, 1978, S. 135 - 167
- Shepard, R.N., Kilpatrick, D.W. & Cunningham, J.P. The internal representation of numbers, *Cognitive Psychology*, 1975, 2, 82 - 138
- Sheppard, J.L. A structural analysis of concrete operations, in Keats, J.A., et al. *Cognitive development, research based on a neopiagetian approach*, New York, Wiley, 1978, S. 47 - 85
- Shultz, T.R., Dover, A. & Amsel, E. The logical and empirical basis of conservation, *Cognition*, 1979, 2, 99 - 123

- Siegel, L.S. The sequence of development of certain number concepts in preschool children, *Developmental Psychology*, 1971, 2(2), 357 - 361
- Siegel, L.S. Development of the concept of seriation, *Developmental Psychology*, 1972, 6(1), 133 - 137
- Siegel, L.S. Development of number concepts: ordering and correspondence operations and the role of length cues, *Developmental Psychology*, 1974, 10(6), 907 - 912
- Siegel, L.S. The cognitive basis of the comprehension and production of relational terminology, *Journal of Experimental Child Psychology*, 1977, 24, 40 - 52
- Siegel, L.S. The relationship of language and thought in the preoperational child: a reconsideration of nonverbal alternatives to Piagetian tasks, in Siegel, L.S. & Brainerd, C.J. Eds. *Alternatives to Piaget: critical essay on the theory*, New York, Academic Press, 1978
- Siegel, L.S. & Goldstein, A.G. Conservation of number in young children, recency vs. relational response strategies, *Developmental Psychology*, 1969, 1, 128 - 130
- Siegler, R.S. Three aspects of cognitive development, *Cognitive Psychology*, 1973, 3, 481 - 520
- Siegler, R.S. Children's thinking, the search for limits, in Whitehurst, G.J. & Zimmerman, B.J. Eds. *The functions of language and cognition*, Academic Press, New York, 1979, S. 83 - 113
- Silverman, H. Teacher made materials for teaching number and counting, *Arithmetic Teacher*, 1972, 19, 431 - 433
- Silverman, J.W. & Rose, A.P. Subitizing and counting skills in 3-year olds, *Developmental Psychology*, 1980, 16(5), 539 - 540
- Silverman, I. & Schneider, D.S. A study of the development of conservation by a nonverbal method, *Journal of Genetic Psychology*, 1968, 112, 287 - 291
- Skemp, R.R. *The psychology of learning mathematics*, Harmondsworth, Penguin, 1971
- Smedslund, J. Microanalysis of concrete reasoning, I. The difficulty of some combinations of addition and subtraction of one unit, *Scandinavian Journal of Psychology*, 1966, 7, 145 - 156

- Smedslund, J. Psychological diagnostics, *Psychological Bulletin*, 1969, 73, 237 - 248
- Smith, L.B. & Kemler, D.G. Developmental trends in free classification, evidence for a new conceptualization of perceptual development, *Journal of Experimental Child Psychology*, 1977, 24, 279 - 298
- Smither, S.J., Smiley, S.S. & Rees, R. The use of perceptual cues for number judgment by young children, *Child Development*, 1974, 45, 693 - 699
- Souviney, R.J. Cognitive competence and mathematical development, *Journal for Research in Mathematics Education*, 1980, 11(3), 215 - 224
- Spears, W.C. & Dodwell, P.C. An investigation of different instructional methods on number concept understanding and arithmetic learning, *Canadian Journal of Behavioral Science*, 1970, 2, 136 - 147
- Spradlin, J.E., Cotter, W.W., Stevens, L. & Friedman, M. Performance of mentally retarded children on pre-arithmetic tasks, *American Journal of Mental Deficiency*, 1974, 78, 397 - 403
- Steiner, G. Kind und Mathematik, *Neuere Beiträge der Psychologie, Zeitschrift für Pädagogik*, 1974, 20(4), 677 - 702
- Stelljes, H. Denken und Handeln, *Mathematik in der Vorklasse/ Eingangsstufe*, Braunschweig, Westermann Verlag, 1977
- Stock, W. & Flora, J. Cardinality and ordination learning in young children, Unpublished manuscript, Arizona State University, 1975
- Svenson, C. & Broquist, S. Strategies for solving simple addition problems, a comparison of normal and subnormal children, *Scandinavian Journal of Psychology*, 1975, 16, 143-151
- Surber, C.F. The utility of "simplification" as a developmental research strategy, *Child Development*, 1979, 50, 571 - 574
- Tall, D. The notion of infinite measuring number and its relevance to the intuition of infinity, *Educational Studies in Mathematics*, 1980, 11, 271 - 284
- Thayer, E.S. & Collier, C.E. The development of transitive inference: a review of recent approaches, *Psychological Bulletin*, 1978, 85 (6), 1327 - 1343

- Thom, R. "Modern" mathematics : an educational and philosophical error? American Scientist, 1971, 59, 695 - 699
- Thom, R. Moderne Mathematik, Gibt es das ? Didaktik der Mathematik, 1975, 1, 251 - 263
- Tomkins, S. A theory of memory, in Antrobus, J. Cognition and affect, New York, 1971
- Tropfke, J. Geschichte der Elementarmathematik, 4. Auflage, Band 1, Arithmetik und Algebra, New York, DeGruyter, 1980
- Underwood, B.J. Experimental Psychology, 2nd. ed. New York, Appleton, 1966
- Van Engen, H. Epistemology, research and instruction, in Roszkopf, M.F., Steffe, L.P. & Taback, S. Eds. Piagetian cognitive developmental research and mathematical education, Reston, Va. NCTM, 1971
- Van Engen, H. & Steffe, L.P. First grade children's concept of addition of natural numbers, in Ashlock, R.E. & Herman, W.L. Eds. Current research in elementary school mathematics, New York, MacMillan, 1970
- Van Wageningen, R.K. Early formation of mathematical concepts, the rights and wrongs of content, Journal for Research in Mathematics Education, 1973, 6, 25 - 34
- Van Wageningen, R.K., Flora, J.A. & Walker, A.A. The introduction of mathematics through measurement or through set theory, a comparison, Journal for Research in Mathematics Education, 1976, 7(5), 299 - 307
- Vest, F.R. A catalog of models for the operations of addition and subtraction of whole numbers, Educational Studies in Mathematics, 1969, 2, 59 - 68
- Volk, D. Zur Wissenschaftstheorie der Mathematik, Fandlungsorientierte Unterrichtslehre, Band B, Bensheim, päd. extra, 1980
- Von Dormelen, J. Didaktik der Mathematik, Braunschweig, Vieweg, 1978
- Von Franz, M.-L. Zahl und Zeit, Psychologische Überlegungen zu einer Annäherung von Tiefenpsychologie und Physik, Suhrkamp, 1980

- Gallach, L., Vail, A.S. & Anderson, L. Number conservation, the roles of reversibility, addition-subtraction and misleading perceptual cues, *Child Development*, 1967, 38, 425 - 442
- Wang, M.C., Resnick, L.B. & Boozer, R.F. The sequence of development of some early mathematics behaviors, *Child Development*, 1971, 42, 1767 - 1778
- Weis, V. & Bauersfeld, H. Neue Mathematik und Rechenunterricht, Ergebnisse aus dem "Frankfurter Projekt", Westermanns Pädagogische Beiträge, 1973, 25(2), 127 - 135
- Wermus, H. Formalisation de quelques structure initiales de la psychogenese, *Archives de Psychologie*, XLI, 163, 1972, 271 - 288
- Wesley, F. The number concept: a phylogenetic review, *Psychological Bulletin*, 1961, 58 (5), 420 - 428
- Westcott, A.M. & Smith, J.A. Basic principles of mathematics programs, in Rubin, L. Ed. *Curriculum handbook*, Boston, Allyn&Bacon, 1977
- Wheatley, G.E. Conservation, cardinality and counting as factors in mathematics achievement, in Athey, E.J. & Rubedeau, D. Eds. *Educational implications of Piaget's theory*, Waltham, Mass. Ginn-Blaisdell, 1970, 294 - 301
- Whiteman, M. & Feisach, E. Perceptual and sensorimotor supports for conservation tasks, *Developmental Psychology*, 1970, 2(2), 247 - 256
- Wilkinson, A. Counting strategies and semantic analysis as applied to class inclusion, *Cognitive Psychology*, 1976, 8, 64 - 85
- Williams, A.H. Mathematical concepts, skills and abilities in kindergarten entrants, *Arithmetic Teacher*, 1965, 12, 261 - 268
- Williams, W. et al Teaching math skills using longitudinal sequences, in Snell, M.E. Ed. *Systematic instruction of the moderately and severely handicapped*, Columbus, Merrill, 1979, S. 302 - 323
- Willoughby, S.S. Mathematics education trends, reform in school instruction, in *The Encyclopedia of Education*, Ed. E.E. Deighton, New York, MacMillan, 1972, Volume 6, S.101-105
- Wilton, K.M. & Boersma, F.J. Conservation research with the mentally retarded, in Ellis, N.R. Ed. *International review of research in mental retardation*, Volume 7, New York, Academic Press, 1974

- Wilton, K.M. & Boersma, F.J. Eye movements and conservation development in mildly retarded and nonretarded children, American Journal of Mental Deficiency, 1974, 79, 285 - 291 (a)
- Winer, G.A. Conservation of small quantities among preschool children, Child Development, 1974, 45, 839 - 842
- Winer, G.A. Class inclusion reasoning in children : a review of the empirical literature, Child Development, 1980, 51, 309 - 328
- Wittman, E. The concept of grouping in Jean Piaget's psychology, Educational Studies in Mathematics, 1973, 2, 125 - 146
- Wittmann, E. Infinitesimalrechnung in genetischer Darstellung, I+II, Ratinger, 1973 (a)
- Wittman, E. Natural numbers and groupings, Educational Studies in Mathematics, 1975, 6, 53 - 75
- Wittman, E. Piaget's Begriff der Gruppierung, in Psychologie des 20. Jahrhunderts, Band 7 Piaget und die Folgen, 1979, Zürich, Kündler, S. 219 - 235
- Witz, K. On the structure of Piaget's grouping, Archives de Psychologie, 1966-1969, 40, 37 - 49
- Wohlwill, J.F. A study of the development of the number concept by scalogram analysis. Journal of Genetic Psychology, 1960, 97, 345 - 377
- Wohlwill, J.F. The learning of absolute and relational number discriminations by children, Journal of Genetic Psychology, 1963, 101, 217 - 228
- Wohlwill, J.F. The study of behavioral development, New York, Academic Press, 1973
- Zaslavsky, C. Africa counts, Boston, Prindle, Weber & Schmidt, 1974
- Zimiles, H. A note on Piaget's concept of conservation, Child Development, 1963, 34, 691 - 695
- Zimiles, H. The development of conservation and differentiation of number, Monograph of the Society for Research in Child Development, 1966, 31(6), Serial No. 108
- Zimmerman, B.J. A social learning's explanation for age related changes in children's conceptual behavior, Contemporary Educational Psychology, 1978, 3(1), 11 - 19

Nachtrag zum Literaturverzeichnis :

Bever, T.G., Lehler, J. & Epstein, J.
What children do in spite of what they know,
Science, 1968, 162, 922 - 925

Hooper, F.E., Wanska, S.K., Patterson, G.W.
& DeFraim, J. The efficacy of small group
instructional activities for training Piagetian
concrete operational concepts, Journal of
Genetic Psychology, 1979, 134, 281 - 297

Resnick, L.B. Instructional psychology,
Annual Review of Psychology, 1981, 32,
659 - 704